SOMMAIRE

REMERCIEMENTS

Je souhaite adresser mes remerciements :

à Pascale Masselot, ma responsable de mémoire,

à Nicolas Pelay, professeur de didactique des mathématiques,

à Séverine, enseignante en classe de CE1,

à Kristina, enseignante en classe de CM1,

aux professeurs de l'école Bignon (Paris XII^{ème}),

à Solène, enseignante en classe de CE2,

à Sara, enseignante en classe de CE2,

à Photine, enseignante en classe de CE2

qui m'ont apporté leur aide et qui ont ainsi contribué à l'élaboration de ce mémoire.

INTRODUCTION

Pour commencer à élaborer ce mémoire, j'ai cherché à préciser ce qu'était la didactique des mathématiques et à poser des définitions de certains concepts. A partir de mes lectures, j'ai fait des liens entre ce qu'écrivaient certains auteurs sur la didactique des mathématiques : A. Bessot[1], S. Soury-Lavergne[2], J. Briand[3] et M-C. Chevalier[4]. Pour eux, la didactique des mathématiques est l'étude des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage dans cette discipline. Le savoir ne vient pas de l'enseignant, il doit en être indépendant. Ces auteurs définissent tout acte pédagogique comme l'espace entre trois sommets d'un triangle : « le savoir », « l'étudiant », « l'enseignant ». Il existe des relations entre les pôles : entre « le savoir » et « l'enseignant » se trouve « l'enseignement » c'est à dire le travail didactique de la gestion de l'information dans lequel on élabore les savoirs enseignés, entre « l'enseignant » et « l'étudiant » se trouve « l'éducation et la formation » c'est le secteur des interactions et de la pédagogie, et entre « l'étudiant » et « le savoir » se trouve « l'apprentissage » qui permet de construire des stratégies pour apprendre. Ainsi, il existe une distinction entre « enseignement » et « apprentissage » : l'apprentissage fonctionne comme un enchaînement de règles et se positionne sur l'axe « étudiant - savoir », tandis que l'enseignement se place sur l'axe « enseignant - savoir ».

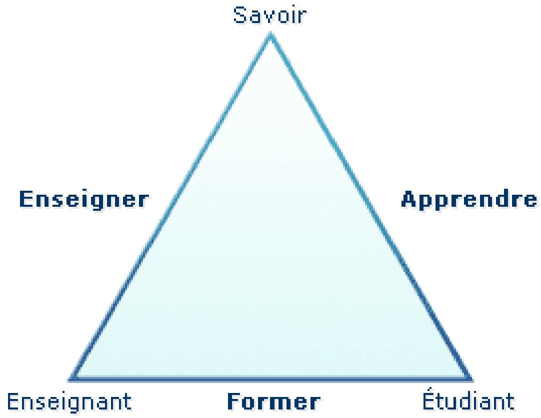

Figure 1 *– Le « triangle pédagogique »*

Dans les ouvrages que j'ai lus, j'ai rencontré des concepts didactiques que j'ai cherché à définir : *« un obstacle est une connaissance et non une absence de connaissance, le rejet de cette connaissance entraîne une connaissance nouvelle, l'obstacle redevient prédominant*

[1] Collaboratrice bénévole et maître de conférences hors classe retraitée à l'université Joseph Fourier, (2004) *Une introduction à la théorie des situations didactiques.*

[2] Maître de conférences, didactique des mathématiques et TICE au laboratoire S2HEP, (2010) *Introduction à la théorie des situations didactiques.*

[3] Maître de conférences en mathématiques à l'IUFM de Bordeaux, (1995) *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques.*

[4] Auteur, (1995) *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques.*

dans certaines situations, même après avoir été remplacé par une nouvelle connaissance. » et *« une situation adidactique c'est quand l'élève fait des choses pour des raisons didactiques et prend les responsabilités pour s'approprier le savoir. L'enseignant se retire alors et laisse les élèves chercher par eux-mêmes. »*

Après avoir approfondi ces définitions, j'ai cherché à savoir auprès de certains enseignant quelles notions à enseigner pouvaient leur poser problème. L'apprentissage des techniques opératoires de la soustraction posée était un thème qui menait couramment à débats dans les salles de professeurs et lors des réunions d'enseignants du primaire. En effet, un jour j'ai surpris une conversation dans une salle de professeurs où une enseignante de CM1 se demandait pourquoi plusieurs élèves de sa classe avaient des façons différentes de poser la soustraction, elle avait donc sondé ses collègues de CE2 pour savoir comment ils avaient appris à leurs anciens élèves à la poser. A partir de là ils se sont rendus compte qu'ils n'apprenaient pas tous à leurs élèves la même méthode et qu'ils avaient différentes façons de présenter la soustraction posée avec les retenues. J'ai donc décidé de m'intéresser de plus près à ce sujet et d'élaborer mon mémoire autour de ce thème. D'autant plus que je me demandais comment j'aurais pu l'aborder en tant que future enseignante.

En lisant la ressource *Le nombre au cycle 3* sur le site d'Eduscol, notamment la partie « Calcul et conceptualisation » rédigée par D. Butlen[5] et par par P. Masselot[6], j'ai pu distinguer qu'il existait trois sortes de calcul : le calcul mental, le calcul instrumenté et le calcul posé. Dans ce mémoire, nous nous intéresserons principalement au dernier, mais il ne faut pas oublier que les trois sont liés et s'articulent les uns avec les autres. Selon la ressource « *tout calcul appelle à un raisonnement et nécessite une maîtrise et compréhension de certaines techniques, par exemple pour ce qui est des retenues. Le calcul posé repose sur une part d'algorithmique. La pratique du calcul permet d'acquérir des techniques et d'obtenir un résultat mais c'est aussi un moyen de tester, produire, enrichir et développer des connaissances mathématiques.* »

Après ces recherches, j'ai davantage axé mes lectures sur la technique opératoire de la soustraction posée abordée à partir du CE1 (CE1 : 7 –8 ans). Marcelle Pauvert[7] donne des arguments pour justifier le fait que la technique de la soustraction posée est difficile à comprendre pour les élèves, notamment parce qu'il existe différentes façons de la poser et les élèves ont du mal à mettre du sens aux retenues. A partir de là, j'ai reformulé plus précisément

[5] Professeur des Universités

[6] Maître de conférences

[7] Auteur de *Faire comprendre la soustraction*

mes questions : les enseignants doivent-ils harmoniser leurs méthodes ? Le passage d'une technique à une autre constitue-t-il un obstacle ? Pour qu'ils assimilent mieux la soustraction posée d'une façon plus durable, quelles activités préalables peut-on proposer aux élèves ? Faut-il leur enseigner toutes les méthodes ou leur en imposer une ? D'un point de vue plus général, je me suis demandée quel était l'intérêt de travailler sur les techniques opératoires du point de vue de l'apprentissage des mathématiques à l'école. Mes lectures préliminaires sur la didactique et les mathématiques m'ont permis d'élaborer une méthodologie. Pendant ma première année de Master pour investiguer ma problématique et comprendre comment les enseignants s'y prennent avec les techniques opératoires je suis d'abord allée lire les programmes officiels : documents que tout enseignant se doit de consulter pour élaborer ses cours, puis je suis allée regarder dans des manuels scolaires pour les élèves en mathématiques comment la soustraction posée était abordée, ensuite je suis allée observer des classes de CE1 et de CM1 afin de voir comment était enseignée la technique opératoire quand on l'aborde pour la première fois, puis comment on pouvait la prolonger avec les nombres décimaux, et pour finir je suis allée mener une enquête auprès de différents professeurs du premier degré pour pouvoir me rendre compte de comment chacun visualise la technique opératoire de la soustraction posée. Pendant ma seconde année de Master j'ai cherché à affiner mes recherches en allant observer dans une autre école deux classes de CE2 qui abordaient de nouveau la soustraction posée pour voir quels problèmes les élèves rencontraient face à cette opération dans ce niveau de classe. J'ai aussi pu établir un lien entre la façon d'aborder cette séquence dans ces deux classes de la même école où les enseignantes avaient décidé d'harmoniser leurs méthodes. Étant donné que la résolution de problèmes constitue la finalité de l'apprentissage des techniques opératoires, j'ai élaboré une liste de problèmes faisant intervenir plusieurs types d'opérations destinée à une classe de CE2, pour voir si les élèves savaient laquelle utiliser, de quelle façon et s'ils mettaient du sens aux nombres et aux retenues qu'ils utilisaient.

I. LES OPÉRATIONS

1. Du côté institutionnel

J'ai dans un premier temps orienté mes recherches du côté des anciens et des nouveaux programmes scolaires. À la fin du XIX^{ème} siècle, selon l'*article 18* des programmes de 1882, les enfants apprenaient les quatre opérations dès l'âge de 5 ans. Même s'ils ne mettaient pas de sens aux opérations qu'ils effectuaient, les mécanismes du calcul étaient enseignés le plus tôt possible aux élèves pour qu'ils puissent les retenir plus facilement. D'autant plus qu'à cette époque la scolarité obligatoire s'arrêtait à 13 ans, donc il était nécessaire d'enseigner toutes les opérations dès le CP (CP : 6 –7 ans) pour que les élèves quittent l'école avec les savoirs appropriés. L'enseignement des opérations était donc basé sur la répétition. Mais quelle est la différence entre une « opération » et un « calcul » ? D'après O. Batteux[8] il existe une séparation entre ces deux concepts. En effet, « l'opération » est un choix avec l'écriture de son résultat ou avec son calcul, par exemple « 5 + 3 ». Ça relève donc d'une décision, alors que « le calcul » représente la transformation de l'écriture d'un résultat en une autre écriture, par exemple « 8 ». Dans un problème tel que « J'ai 31 billes, j'en perds 29 ... » il est sous-entendu qu'il faut calculer le reste en cherchant combien il faut pour compléter de 29 jusqu'à 31. Pour O. Batteux, ce type de problème où on recherche un complément n'a pas de sens et peut donc ainsi constituer un obstacle à la compréhension de l'élève.

Après m'être intéressée aux anciens programmes et aux définitions de « l'opération » et du « calcul » j'ai regardé des programmes plus récents et je me suis rendue compte que de nos jours les programmes allaient plus vers une pédagogie axée sur le sens. En effet, depuis 1970, moment où il y avait un accès de masse à l'enseignement secondaire, l'école primaire permettait de mieux préparer les élèves à l'enseignement secondaire. L'enseignement des mathématiques pouvait ainsi s'étendre sur le long terme et il n'y avait plus d'impératif à enseigner les quatre opérations dès le CP. Des résultats de travaux dans le domaine du développement cognitif, comme ceux de J. Piaget[9], montrent qu'à partir de 2 ans et demi un enfant entre dans le stade pré-opératoire : tout ce qu'il réussit à construire sur le plan de l'action entre 0 et 24 mois doit être reconstruit sur le plan de la représentation. L'enfant est donc tout d'abord dans le concret et a des difficultés à manipuler des concepts abstraits. Sa pensée est très égocentrique car il ne déplace pas son point de vue. C'est en grandissant qu'il

[8] Administrateur de l'Hyperclasse (site de ressources pédagogiques)

[9] Psychologue du développement et d'épistémologie, (1991) *La Genèse du nombre chez l'enfant,(2004) La psychologie de l'enfant.*

devient peu à peu capable de penser en terme symbolique, de se représenter des choses à partir de mots ou de symboles, de saisir les notions de quantité. Les enfants de moins de 7 ans estiment que « longueur = nombre », selon J. Piaget ils ne connaitraient donc pas la notion de quantité. En école maternelle ils sont encore intuitifs, au sens où ils sont « prisonniers du cadre perceptif ». Donc, d'après ses travaux, les enfants ne pouvaient pas comprendre à quoi renvoyaient et quel était le sens des premiers nombres avant le CP. Ces travaux peuvent donc avoir été pris en compte par les concepteurs des programmes de 1970, 1977 (CP), 1978 (CE), qui plaçaient les apprentissages numériques seulement à partir de la classe de CP et non plus en classe de maternelle. Entre 1970 et 1990 le signe « - » est introduit seulement au milieu du CE1 (CE1 : 7–8 ans) et c'est l'addition à trou qui est abordée en fin de CP ainsi qu'en début de CE1.

Quand on s'intéresse à l'évolution des programmes on remarque que la place accordée à l'apprentissage des techniques opératoires peut varier. Il y a donc, en 1970, un tout nouveau programme qui s'appuie sur des arguments didactiques, comme le fait qu'il est difficile pour un enfant de CP de comprendre que le nombre qu'il faut ajouter à 8 unités pour en avoir 15 est aussi le résultat du retrait de 8 unités à 15 unités. En d'autres termes, il est compliqué, pour lui, de s'approprier l'équivalence entre la procédure de recherche de la valeur d'un complément et celle de recherche du résultat d'un retrait.

Dans les programmes de maternelle de 1985, les activités de tris, de classements, de sériations, de comparaisons, d'organisation de l'espace étaient principales. Dans ceux de 1995, ce sont encore les mêmes sous - chapitres contre un seul proposant une "approche du nombre", où il était question de travailler surtout sur les quantités en termes de perception et sur la comparaison de collections à des collections-repères, avant de dénombrer grâce à la comptine. C'est seulement en 2002 qu'en classe de maternelle on a commencé à associer le nom des nombres connus avec leur écriture chiffrée en se référant à une bande numérique. Le comptage - numérotage et les activités de lecture visuelle des nombres (qui ne prennent pas en compte les capacités et les intérêts des élèves) ont pu déstabiliser l'enseignement du calcul en maternelle selon R. Brissiaud[10]. D'après le hors- série n°3 du 19 juin 2008, « *La résolution de problèmes fait l'objet d'un apprentissage progressif et contribue à construire le sens des opérations. Conjointement une pratique régulière du calcul mental est indispensable. De premiers automatismes s'installent. L'acquisition des mathématiques est toujours associée à une intelligence de leur signification.* ».

[10] Maître de conférences en Psychologie Cognitive

Je me suis ensuite intéressée aux lectures d'autres manuels sur les mathématiques et à une étude de la DEPP (Direction de l'Évaluation, de la Prospective et de la Performance). D'après M. Goëtz-Georges[11] il serait plus judicieux de travailler sur le sens de la soustraction plutôt dès la grande section de maternelle. Pour cette ancienne enseignante il serait donc intéressant de faire manipuler les élèves sur des petites quantités : « j'ai 6 objets, j'en retire 4 », de faire des calculs de complétion et des jeux d'échanges d'objets tel que le jeu de la caissière (rendre la monnaie sur une somme donnée avec des pièces et des billets). Il serait aussi utile, selon elle, de travailler à partir d'une piste numérique en utilisant les termes d' « avancer » et de « reculer » et d'utiliser régulièrement un matériel de numération adapté (avec les centaines, les dizaines et les unités) et de travailler sur le codage des résultats et la représentation des nombres. Elle propose aussi de faire déjà résoudre aux élèves des problèmes soustractifs simples liant les écritures schématiques et chiffrées. D'après une étude de la DEPP, jusqu'en 1987 les élèves de CM2 (CM2 : 10–11ans) calculaient bien. Mais de 1987 à 1999 les performances en calcul dans tous les niveaux de compétences étaient en énorme baisse chez les élèves. L'étude était composée de 33 items en calcul (portant sur les quatre opérations sous forme de calcul posé et sur quelques petits problèmes). Depuis cette période, les performances se sont stabilisées à ce bas niveau. Effectivement, de nos jours les élèves ont de moins bonnes capacités dans le domaine du calcul alors qu'ils commencent désormais leurs apprentissages numériques dès la petite section de maternelle. Dans les programmes de 2002 l'accent sera donc mis sur le calcul mental et l'apprentissage des techniques opératoires, ce qui entrainera un redressement des performances en calcul chez les élèves à partir de 2007. D'après R. Brissiaud, les élèves en difficulté savent compter, mais ne savent pas calculer. Donc le problème ne viendrait pas de là selon lui, mais viendrait plutôt du comptage qui empêcherait le progrès dans le calcul. Le *Bulletin Officiel hors-série numéro 3* du 19 juin 2008, a placé l'étude de la soustraction posée à partir du CE1 (CE1 : 7–8 ans), or pour R. Brissiaud l'équivalence entre la recherche d'un complément, d'un écart et du résultat d'un retrait pour la soustraction est loin d'aller de soi pour les élèves. Cependant, beaucoup de mathématiciens contestent ses propos, c'est un sujet qui mène toujours à débats de nos jours.

En 2004, un problème a été proposé à 110 élèves au début et en fin de CE1 (CE1 : 7– 8ans) par R. Brissiaud et E. Sander[12].

---

[11] Professeur en école maternelle et auteure de *Situations-jeux pour des apprentissages mathématiques en PS-MS*

[12] Professeur à l'Université Paris 8 et responsable de l'équipe "Compréhension, Raisonnement et Acquisition de Connaissances" du laboratoire Paragraphe

> Un minibus transporte 3 personnes. À un arrêt, d'autres personnes montent et le minibus redémarre alors qu'il est complet : il y a maintenant 42 personnes à l'intérieur. Combien de personnes sont montées dans le minibus ?

En début de CE1, ce problème est réussi par 22 % des élèves alors que 75 % d'entre eux savent trouver le résultat du retrait de 3 unités à 42. Peu d'élèves utilisent l'équivalence entre la recherche de la valeur d'un complément et celle du résultat d'un retrait. En fin de CE1, ils sont plus nombreux à l'utiliser : 42 % des élèves réussissent ce problème. Donc pendant l'année de CE1, les élèves progressent. Cependant, ces progrès auraient pu être plus importants pendant le cycle 2. Selon R. Brissiaud, ce qui a surement détérioré les capacités naturelles de calcul chez les élèves, c'est l'apparition en classe de maternelle du comptage - numérotage avec trop de rituels difficiles et d'exercices peu formateurs et ça pourrait aussi venir des programmes. Mais il n'y a rien de tranché là-dessus, ce sujet suscite toujours des polémiques car beaucoup d'autres facteurs pourraient aussi entrer en jeu.

2. Du côté du savoir et de la connaissance à transmettre

D'après la ressource *Le nombre au cycle 3* sur le site d'Eduscol, quand un élève comprend et maîtrise une technique opératoire, il l'automatise et n'a plus beaucoup d'initiative à prendre dans le déroulement du calcul : il suit les conventions qu'il a apprises et comprises en respectant une certaine disposition. Là où l'élève peut prendre des initiatives, c'est quand il doit calculer mentalement les résultats partiels. Il lui est aussi nécessaire d'avoir une connaissance sur les grandeurs des nombres, ainsi que de penser à recourir à l'opération inverse (comme utiliser l'addition pour vérifier le résultat de la soustraction) afin de vérifier son résultat.

D'après plusieurs études notamment celles de G. Brousseau[13] (1980, 1981, 1987), les élèves qui ont des difficultés dans les techniques opératoires en ont en particulier avec les retenues et les décimaux. La cause principale de ces difficultés viendrait d'une mauvaise construction du système de numération. Les difficultés sont souvent masquées dans les évaluations. Les procédures automatiques se font sans compréhension de la tâche par les élèves. M. Rondard[14] a cherché quels étaient les obstacles à la construction du nombre au CP et au CE1. Il en a conclu que les élèves avaient souvent des difficultés avec la file numérique : avec son ordre conventionnel, les irrégularités des nombres de « 10 à 19 » et de « 70 à 99 ». Il s'est aussi rendu compte que chez les élèves il y avait un comptage par pointage non-synchronisé : la file est mémorisée comme une comptine, mais certains élèves ne font pas de

---

[13] Professeur émérite de mathématiques à l'Institut Universitaire de Formation des Maîtres d'Aquitaine et Docteur Honoris Causa des Universités de Montréal, de Genève, de Cordoba, de Chypre, de Palermo

[14] Formateur ASH en Vendée, (2008) *Boîte à outils pour l'apprentissage de la numération.*

lien entre les mots utilisés et les nombres qu'ils connaissent déjà. Le fait qu'on utilise les mêmes mots pour désigner, dénombrer, ranger ou quantifier est difficile à comprendre pour certains élèves. Il a aussi observé d'autres difficultés concernant l'absence des représentations des quantités, la mauvaise utilisation des mots dans le langage courant, la spécificité de l'écriture des nombres et une absence de correspondance entre ce qui est dit et ce qui est écrit. Il existe de nombreux matériels pour aider les élèves à se construire différentes représentations du nombre et à faire des liens entre eux. Pour remédier à ces difficultés, M. Rondard propose un matériel de numération avec des cartes comme par exemple le jeu des familles qui permet de « *repérer les différentes dizaines et les passages d'une dizaine à l'autre* » *et de « se donner des repères fiables et des stratégies pertinentes (famille / premier chiffre du nombre / algorithme) pour lire correctement un nombre donné compris entre 0 et 100* », ou encore le jeu de la bataille des nombres qui permet « *de comparer des nombres entre eux (« plus grand que… », « plus petit que… », « égal à… »)* ». En dehors de la boîte à outils de M. Rondard, il existe d'autres matériels de numération tels que les réglettes Cuisenaire qui sont constituées d'un ensemble de 10 réglettes de couleurs (avec le centimètre pour longueur), reproduites plusieurs fois et à chaque quantité correspond une couleur.

Pour faire face aux difficultés des élèves on peut aussi utiliser le boulier chinois qui permet d'apprendre à calculer. C. Poisard[15] a travaillé sur des séances menées en mathématiques en cycle 3, à partir du boulier chinois. Celui-ci date du XIII$^{\text{ème}}$ siècle, dans chaque tige le boulier chinois possède 2 quinaires (qui valent chacune cinq) et 5 unaires (qui valent chacune un) et chaque tige représente une position du système décimal avec les unités, les dizaines, les centaines, etc. en partant de la droite vers la gauche. La position « zéro » s'obtient quand les boules sont toutes placées vers l'extérieur.

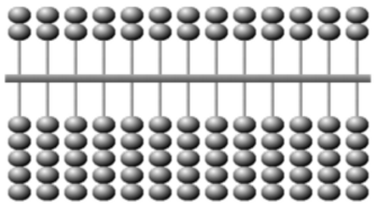

Figure 2 *– Boulier chinois représentant « zéro »*

C. Poisard a fait poser aux élèves des additions et des soustractions avec ce type de boulier. En effet, avec cet instrument on voit le passage des retenues puisqu'on l'effectue à la main. Par exemple, le passage de 10 dizaines en une centaine se fait par l'échange de 10 dans la tige des dizaines avec une dans celle des centaines. On peut ainsi commencer une opération par la

[15] CREAD, IUFM de Bretagne-UBO

gauche pour avoir un ordre de grandeur du résultat, sans avoir de problème de retenue puisqu'on peut inscrire des nombres jusqu'à 15 dans une colonne donc on voit bien le passage des retenues. Cependant, C. Poisard a remarqué que le fait qu'il y ait trop de boules, pendant la phase de découverte de ce type de boulier, peut constituer un obstacle pour les élèves. La soustraction sur le boulier chinois consiste à poser le premier membre de la soustraction et à retirer les boules correspondant au second membre de l'opération. Les nombres sont donc codés, ce qui rend, selon C. Poisard, une inscription dynamique, ce qui est impossible à l'écrit. Cette manière d'écrire les nombres, de les coder est directement liée à l’objectif d’utilisation d’un algorithme de calcul. En créant des situations d'apprentissage à partir de ces objets, l'enseignant permet aux élèves de s'approprier les connaissances qu'il doit leur transmettre. En effet, grâce aux bouliers les élèves peuvent ainsi se représenter l'image mentale de ces instruments pour effectuer leurs calculs.

En s'y intéressant de plus près, C. Poisard a analysé les deux méthodes les plus courantes pour poser la soustraction à l'école : la « technique traditionnelle » et la « technique du cassage de la dizaine » *(la description détaillée de ces techniques : cf. II)1.)*. Avec la « technique traditionnelle » on procède par ajouts parallèles. On utilise à la fois la propriété : $a - b = (a + x) - (b + x)$ c'est-à-dire que l’on peut additionner ou soustraire un même nombre aux deux termes d’une soustraction, le résultat sera le même. Et on utilise aussi la propriété du système positionnel à base dix : 10 unités = 1 dizaine, etc. Mais C. Poisard a pu observer qu'avec le boulier chinois, la technique habituelle ne se transposait pas. Par contre il permettait de bien mettre en pratique la méthode du « cassage de la dizaine ». En effet, cette méthode permet de faire ressortir les propriétés du système de numération positionnelle en base 10 qui fait souvent un obstacle chez les élèves lors de l'apprentissage des techniques opératoires. Le boulier chinois est donc un bon support pour faire un lien entre la numération et les opérations. Dans le « cassage de la dizaine », on prend dans une colonne pour mettre dans une autre. On utilise seulement la propriété du système positionnel décimal qui permet de faire des échanges entre les colonnes. Pour calculer « 933 - 51 » sur le boulier, pour enlever « 1 » on procède comme à l'écrit, mais pour enlever 50 de 932 : on abaisse une unaire des centaines que l’on remplace en abaissant les deux quinaires des dizaines. Dans la tige des dizaines, on en a 13, desquelles on peut ainsi enlever cinq dizaines et obtenir le résultat (ce qui est aussi possible de faire avec un abaque). L'utilisation du matériel de numération peut donc aussi aider à appréhender certaines techniques opératoires.

II. LA SOUSTRACTION POSÉE À L'ÉCOLE.

Après avoir observé les programmes scolaires et avoir fait ces recherches assez générales, je me suis interrogée de plus près à la soustraction, en cherchant ce à quoi elle pouvait renvoyer précisément et comment elle pouvait être enseignée en classe.

1. Comment l'enseigne-t-on ?

Poser une opération est un savoir-faire et une connaissance. On ne peut pas l'inventer si on n'a jamais appris son fonctionnement et sa technique. En effet, la soustraction se fait en trois étapes bien distinctes. La première consiste à la poser. La soustraction est l'une des opérations essentielles de l'arithmétique, elle combine deux ou plusieurs grandeurs du même type appelées opérandes, pour donner un seul nombre : la différence. Quand on la pose on place donc l'opérande le plus grand en-haut et le plus petit en-dessous, les deux étant séparés par le signe « - ». La soustraction repose sur différentes connaissances, notamment en numération avec le chiffre des unités, le chiffre des dizaines, etc. sur des petits nombres. La seconde étape consiste à l'effectuer. La principale connaissance pour l'effectuer en colonne est de connaitre la soustraction avec des nombres à un chiffre. Le sens de la soustraction est de trouver le résultat d'une diminution ou la différence entre deux nombres. Une fois le résultat trouvé, il faut le vérifier, c'est ce en quoi consiste la dernière étape. Pour vérifier son résultat, il est nécessaire de connaitre ses tables d'addition et de savoir les utiliser. En effet, comme la soustraction est aussi l'opération inverse de l'addition, pour pouvoir la vérifier il faut ajouter « ce qui est enlevé » au « résultat », ainsi on doit retrouver le « nombre de départ » : $a - b = c \Rightarrow a = b + c$. On peut aussi soustraire la différence du premier nombre, et retrouver ainsi le second nombre $a - b = c \Rightarrow a - c = b$.

Selon les manuels scolaires et les programmes, il existe trois manières de concevoir la soustraction : le sens "enlever", qui doit être vu comme le calcul d'un nombre d'objets qu'il reste à une quantité. Pour obtenir un résultat, l'élève peut dessiner des images et en barrer ou bien il peut décompter. L'IEN (Inspection de l'Éducation Nationale) de Landivisiau trouve que ce sens est vite compris par les élèves et permet d'introduire le signe « - ». Il est très utile quand on enlève peu. On a aussi le sens "pour aller à" qui montre qu'on utilise la soustraction pour calculer un complément ou ce qui manque. Les membres de l'IEN de Landivisiau trouvent que ce sens est bien adapté pour la compréhension des problèmes arithmétiques qui nécessitent de chercher ce qu'on a ajouté ou de chercher une partie quand on connaît le tout et l'autre partie. Et pour finir on a le sens "écart" où on utilise la soustraction pour calculer un écart ou une différence. Ce sens intervient dans des problèmes de comparaison. Selon O. Batteux[16] « *la polysémie de la soustraction est constitutive de sa compréhension* », en effet pour lui la soustraction a deux sens : celui de servir à calculer ce qui reste et celui de servir à calculer ce qu'il faut pour compléter. C'est pour lui le principal élément du savoir à construire, et « *il faut donc habituer dès le début de l'apprentissage à choisir la soustraction dans ses deux fonctionnalités en résolution de problèmes, puis dans un second temps, de choisir indépendamment du problème la conception qui facilite le plus le calcul.* »

Pour poser la soustraction avec des retenues, il existe différentes techniques :

- **<u>La méthode « par emprunt »</u>**, aussi appelée « par cassage », « anglo-saxonne », « par démolition » et « par transfert » date du XII^{ème} siècle et fut employée par Rabbi Ben Ezra, un mathématicien israélite. Elle fut enseignée en France au début du XIX^{ème} siècle. Lorsque le chiffre du bas est plus grand que le chiffre du haut, on ajoute dix unités du rang considéré au chiffre d'en haut, qu'on prélève sous forme d'une unité au chiffre du rang suivant qu'on barre et on y écrit à la place le chiffre juste inférieur.

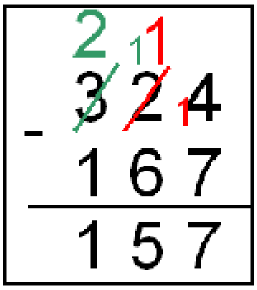

Figure 3 *– Soustraction posée avec la méthode « par emprunt »*

Avec cette technique, les élèves doivent penser : « dans 324, il y a 3 centaines 2 dizaines et 4 unités » et « une centaine c'est 10 dizaines (et une dizaine c'est 10 unités). ». Pour D. Pernoux[17], afin d'apprendre avec cette méthode, il peut être intéressant d'utiliser du matériel de numération pour montrer aux élèves d'où vient la retenue que l'on écrit : « je prends 1 dizaine que je convertis en 10 unités, donc je mets un 1 devant le chiffre des unités et j'enlève 1 au chiffre des dizaines. ». Ou bien il est possible de manier régulièrement l'abaque ou le boulier afin que les élèves se créent une représentation mentale des nombres. En effet, cette technique de la soustraction posée est la traduction symbolique des manipulations réalisées sur du matériel multi-base (avec de la monnaie ou des abaques). La soustraction est donc facile à simuler avec du matériel et permet de consolider la numération chez les élèves. Dans cette méthode, on procède toujours par des exercices d'échanges de dizaines/unités qui

[16] Administrateur de l'Hyperclasse (site de ressources pédagogiques)

[17] Professeur de mathématiques à l'IUFM d'Alsace

correspondent au "cassage de la dizaine" : on peut la symboliser comme si on cassait des barres de dizaines et des plaques de centaines. La compréhension de la composition des nombres dans le système décimal usuel (avec les unités, dizaines, centaines, ...) se doit d'être solide pour les élèves. Cependant, cette méthode présente une difficulté d'organisation et d'écriture dès que le premier nombre de la soustraction comporte un ou plusieurs zéros aux rangs intermédiaires. D'autant plus que les parents des élèves utilisent la méthode « classique », qu'ils ont apprise lorsqu'ils étaient à l'école et sont dubitatifs face à cette méthode « par emprunt » qu'ils trouvent trop « fantaisiste » car ils ne connaissent pas son fonctionnement.

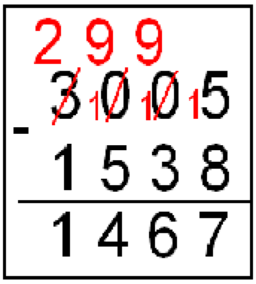

Figure 4 *– Soustraction posée avec la méthode par emprunt avec deux zéros aux rangs intermédiaires*

- **<u>La méthode usuelle « classique »</u>** a été inventée en 1202 au XIII^{ème} siècle par Fibonacci (Léonard de Pise), un mathématicien italien. Le procédé est le même que pour la méthode « par compensation » : il faut ajouter un même nombre aux deux termes de la différence. Cependant, la façon de mettre en page l'opération est différente. Elle peut se poser avec les retenues notées en-haut et en-bas : lorsque le chiffre des unités du bas est plus grand que le chiffre des unités du haut, on ajoute 10 unités du rang considéré au chiffre des unités d'en-haut et une unité au chiffre du rang suivant des dizaines en-bas. Mais le fait que la différence entre deux nombres ne change pas si on ajoute la même quantité à chacun des deux nombres n'est pas toujours évident à assimiler pour un élève. La difficulté vient aussi de la valeur de la retenue où on met un « 1 » qui ne vaut pas la même chose dans une même opération : le sens à lui attribuer n'est pas le même selon la situation.

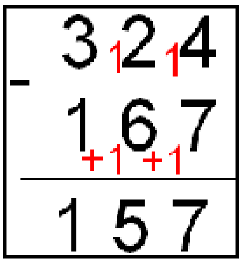

Figure 5 *– Soustraction posée avec la méthode « classique »*

Elle peut aussi se poser avec la propriété des différences égales où on a une conservation de l'écart entre deux nombres et une invariance du résultat. C'est une autre façon de noter les retenues avec la méthode classique, où le « 1 » écrit à côté du chiffre d'en haut signifie « 10 » et le « 1 » écrit à côté du chiffre du bas s'ajoute au chiffre. Pour Y. Thomas[18], la compréhension de cette méthode est souvent problématique pour les élèves. En effet, la confusion introduite par une même notation pour désigner deux choses différentes peut facilement être évitée en s'en tenant à la première version.

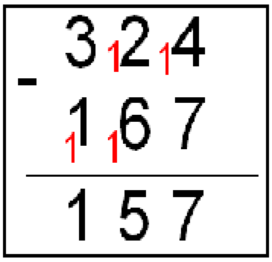

Figure 6 *– Soustraction posée avec une autre notation de la méthode « classique »*

Aujourd'hui, c'est la technique la plus utilisée en France pour poser la soustraction, mais c'est aussi la plus difficile, car les élèves ne comprennent pas forcément la propriété sur laquelle elle repose, c'est à dire sur l'utilisation de la constance des écarts telle que : $a - b = (a + c) - (b + c)$. La retenue « 1 » valant à la fois une dizaine quand on la dispose dans le nombre d'en-haut et à la fois une unité à rajouter quand on la met dans le nombre d'en-bas, est aussi compliquée à comprendre pour les élèves. Mais une fois maîtrisée, la méthode usuelle est la plus économique en termes de coûts puisque de chaque côté on rajoute la même chose, on n'a donc pas besoin de « casser des dizaines » ou de faire des calculs intermédiaires.

- **La méthode « par compensation »**, qui date du XVI$^{\text{ème}}$ siècle, fut employée pour la première fois par Ramus, premier professeur de mathématiques du Collège royal. Cette technique supprime le problème des retenues et consiste à ramener la soustraction à des calculs faciles à résoudre. Le principe est d'ajouter le même nombre aux deux termes de la différence et de s'arranger pour que le premier nombre ne comporte, à l'exception du premier chiffre à gauche, que des « 9 ». On doit donc procéder comme suit : « Combien je dois ajouter pour aller de 324 à 399 ? Je dois ajouter 75. Je pose donc le premier nombre de ma soustraction : 399. Et je fais 167+75 qui me donne 242. Je pose donc mon deuxième nombre à la soustraction. Je peux ensuite calculer 399-242 qui me fait 157, et je reporte mon résultat à côté. »

[18] Formateur de mathématiques à l'IUFM des Pays de la Loire

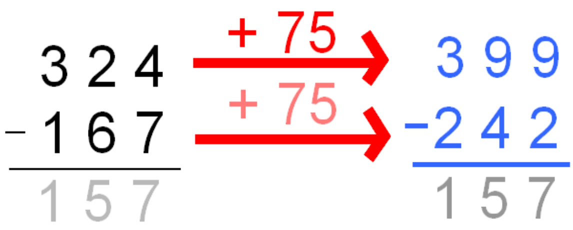

***Figure** 7 – Méthode « par compensation »*

Elle repose sur la propriété de la constance des écarts. Pour maitriser cette méthode il faut que la connaissance des « compléments à 9 » soit solide. Mais cette méthode est coûteuse en écriture.

- **<u>La méthode « par complément »</u>**, aussi appelée « par addition à trou », date du XVI$^{\text{ème}}$ siècle. Elle a été suggérée par Johannes Buteo (Jean Bourrel), un mathématicien dauphinois. Au XIX$^{\text{ème}}$ siècle elle fut reprise sous le nom de méthode « autrichienne ». Elle repose sur la propriété : « On ne calcule pas seulement ce qu'il reste quand on enlève un nombre d'objets à un lot, mais aussi ce qu'il faut ajouter à un nombre d'objets pour obtenir le lot. ». Pour la poser, on procède par le raisonnement suivant : « Peut-on ajouter quelque chose à 7 pour arriver à 4 ? Non, donc on fait une addition avec retenue. Peut-on ajouter quelque chose à 7 pour aller à 14 ? Oui, donc on inscrit 7 en unité dans le résultat. 6 et 1 font 7, donc peut-on ajouter quelque chose à 7 pour aller à 2 ? Non, donc on pose une retenue ... » et ainsi de suite.

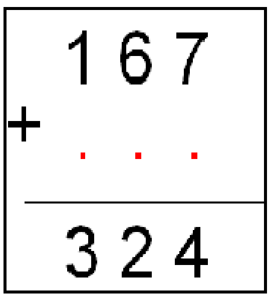

***Figure 8** – Addition à trou*

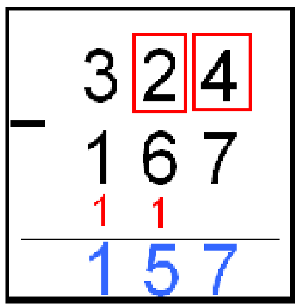

***Figure 9** – Soustraction posée avec la méthode de l'addition à trou*

La présentation sous forme d'addition à trou permet d'effectuer n'importe quelle soustraction. Cette technique « par complément » est utilisée avant de commencer la soustraction posée, pour mieux pouvoir comprendre son fonctionnement et pourquoi on utilise l'addition à la fin pour pouvoir vérifier son résultat. Avec cette méthode, la difficulté pour les élèves est de rechercher le reste et le complément : il leur faut donc une connaissance solide des différents sens : « enlever », « pour aller à », « écart » de la soustraction.

L'apprentissage de la soustraction est plus difficile que celui de l'addition car il existe plusieurs techniques possibles dont les fondements ne reposent pas sur les mêmes principes ni sur les mêmes connaissances. D'après les programmes de 2008, la soustraction est étudiée dès le cycle 2, en classe de CE1 (CE1 : 7–8ans) : elle y est travaillée à partir de problèmes à résoudre et de calcul mental. Les enseignants sont libres d'utiliser la (ou les) technique(s) qu'ils souhaitent. Cependant, la question qui se pose est celle du moment où on introduit une technique. D'après R. Brissiaud[19], l'apprentissage de la technique opératoire ne peut être dissocié de la résolution de problèmes additifs et soustractifs, qui donnent du sens aux techniques de calcul. Il est nécessaire de donner aux élèves des outils de vérification (différents selon la méthode utilisée) tels que l'addition, le saut de puces en avançant ou en reculant et l'habitude de vérifier le résultat (qui doit être plus petit que le nombre de départ). En effet, d'après le document d'accompagnement des programmes de 2008 sur « le calcul posé à l'école élémentaire », l'étude des techniques du calcul posé doit être orientée vers la compréhension et la justification de leur fonctionnement. On ne peut donc pas se limiter à la faire apprendre mécaniquement sous forme d'apprentissage de récitatifs.

2. Du côté des élèves

Dans les exercices des élèves, on rencontre les termes « poser » et « effectuer », qui sont distincts l'un de l'autre. J'ai donc cherché à les définir avant de m'intéresser aux erreurs qu'on pouvait rencontrer dans leurs soustractions posées. Le terme « poser » renvoie à une présentation et relève de plusieurs conventions : dans une soustraction il faut placer l'opérande le plus grand en haut et le plus petit en dessous, à gauche entre les deux nombres on place le signe « - » et pour terminer on trace un trait horizontal en-bas sous lequel on notera le résultat. On pose une opération avant de l'effectuer si l'on ne peut pas la calculer de tête et si l'on ne dispose pas de calculatrice. Lorsque l'on pose une addition ou une soustraction, on doit penser à disposer les chiffres de même rang les uns sous les autres. Le terme « effectuer », quant à lui renvoie à « chercher un résultat ». Effectuer une différence, c'est donner de cette différence une écriture décimale ou fractionnaire qui ne comporte plus le symbole d'opération « - ». Après avoir défini ces termes, j'ai regardé quelles erreurs revenaient souvent dans les copies d'élèves et j'ai complété mes recherches avec celles de M. Pauvert[20] qui avait déjà dressé une liste des erreurs les plus courantes dans son livre.

---

[19] Maître de conférences en Psychologie Cognitive, (2013) <u>Apprendre à calculer à l'école : Les pièges à éviter en contexte francophone.</u>

[20] Auteure, (1990) <u>Faire comprendre la soustraction</u>

- **<u>Soustraction mal posée :</u>** certains élèves ne prennent pas en compte de l'ordre de grandeur des nombres et ne respectent pas la convention que le nombre le plus petit doit être soustrait du plus grand.

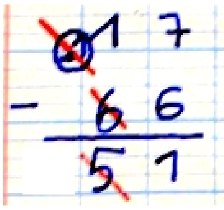

Figure 10 *– Soustraction mal posée en CE2*

- **<u>L'alignement à gauche :</u>** des élèves peuvent disposer l'opération en colonne en alignant à gauche plutôt qu'à droite parce qu'ils utilisent le même sens que celui de l'écriture : « de gauche à droite ». Pour M. Pauvert il est important de leur faire comprendre le rôle des unités des différents ordres qu'il est nécessaire d'aligner, d'où l'écriture de « droite à gauche » dans la disposition des opérations.

$$\boxed{\begin{array}{ll} - & 135 \\ & 37 \\ \hline \end{array}}$$

Figure 11 *– Soustraction posée avec l'alignement à gauche*

J'ai aussi pu observer dans une classe de CM1 que certains élèves avaient du mal à aligner les nombres décimaux. Quand ce cas se produisait ils oubliaient que, comme pour les nombres entiers, les unités doivent être alignées en-dessous des unités, les dizaines en-dessous des dizaines, etc. et que pour la partie décimale le raisonnement était le même : les dixièmes doivent être placés sous les dixièmes, la virgule sous la virgule, etc.

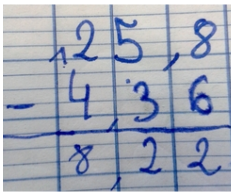

Figure 12 *– Soustraction posée en CM1 avec le problème de l'alignement des décimaux et de la virgule*

- **<u>La difficulté du zéro :</u>** c'est une erreur qui peut perdurer jusqu'en CM2, elle provient d'une utilisation abusive des règles de l'addition : « 0 est un élément neutre pour l'addition et l'addition et commutative », ainsi les élèves savent que : « 2 + 0 = 2 et 0 + 2 = 2 » et pensent par analogie que : « 2 - 0 = 2 et 0 - 2 = 2 ». Or, « 0 - 2 » ne convient plus quand il s'agit de nombres entiers naturels. Pour y remédier, M. Pauvert conseille d'insister sur le fait de montrer l'importance du zéro dans l'écriture du nombre. Par exemple en montrant que « 43 »,

« 403 » et « 4003 » sont différents, les nombres n'ont pas la même valeur, ni le même nombre de rangs et donc que leurs « zéros » sont importants.

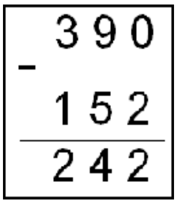

***Figure 13** – Soustraction posée avec la difficulté du zéro*

- **<u>Les retenues :</u>** il arrive que des élèves ne tiennent pas compte des retenues car ils n'ont pas compris leur fonctionnement ou leur sens. Dans ce cas, ils ne les écrivent pas et ne les comptent pas. Ils additionnent alors les chiffres entre eux, ou bien ils enlèvent le chiffre le plus petit du chiffre le plus grand, ou cherchent pour un des deux nombres son complément à 10.

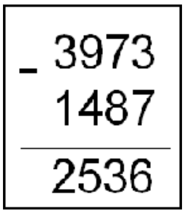

***Figure 14** – Soustraction posée sans prendre compte des retenues*

Ou bien, elles peuvent être écrites alors qu'il n'y en a pas lieu et ne sont pas utilisées. Ou encore, elles peuvent être prises en compte sur une colonne, mais sans compensation à la colonne précédente. Les problèmes en rapport avec les retenues sont le résultat d'une technique et d'un sens non compris de la technique opératoire utilisée.

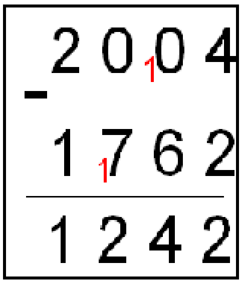

***Figure 15** – Soustraction posée avec la difficulté des retenues*

- **<u>Les autres erreurs :</u>** M. Pauvert a remarqué que beaucoup d'élèves avaient des procédures erronées car ils utilisaient d'autres connaissances et n'avaient donc pas le sentiment de s'être trompés. Tel que le montre la ***Figure 16***, l'élève a utilisé : « 4 + 3 = 7 et 7 + 1 = 8 et 5 + 4 = 9 »

$$\begin{array}{r} 3913 \\ -1487 \\ \hline 1574 \end{array}$$

Figure 16 *– Soustraction posée avec une autre erreur*

Elle a aussi remarqué que des erreurs pouvaient être dues à la mauvaise compréhension des explications de l'enseignant. En effet, il est souvent dit aux élèves qu'il faut « poser le grand nombre d'abord pour calculer une soustraction ». Mais il faut bien préciser que ça correspond à l'expression : « 125 - 58 » parce que l'élève le pense parfois de la façon : « 58 je l'enlève de 125 donc 58 ôté de 125 ». Or, seule l'expression avec le signe « - » correspond à l'écriture mathématique qu'on utilise.

3. Les manuels

Je me suis intéressée aux ressources mises à la disposition des enseignants pour pouvoir enseigner la soustraction posée. J'ai décidé de sélectionner quatre manuels qui abordent chacun la soustraction différemment. Après les avoir feuilletés, j'ai lu les guides pédagogiques qui se rapportaient à chaque manuel. A partir de là j'ai pris des notes en annexe *(« Étude de manuels » cf. annexe p.3)* sur ce que j'ai pu observer. Puis j'ai sélectionné les points importants pour les faire apparaître dans ce mémoire.

Dans Les mathématiques à la découverte du monde, nouvelle édition de chez Hachette Éducation (2008) on trouve quatre objectifs principaux, étalés sur quatre pages, pour acquérir la soustraction posée :

- savoir poser et effectuer en colonnes une soustraction sans retenue,
- préparer les soustractions à retenue par des manipulations (« casser » une dizaine pour soustraire des unités),
- maîtriser une technique opératoire : appliquer à la soustraction écrite le principe du cassage de la dizaine,
- découvrir que la différence entre a et b ne change pas si on ajoute ou si on retire x aux deux nombres : $a - b = (a + x) - (b + x)$.

Ils utilisent d'abord la technique du cassage de la dizaine, puis ils en arrivent à la « technique traditionnelle » où toutes les retenues sont notées par des « 1 » de la même taille. Ils se limitent au CE1 à proposer des calculs faisant intervenir une seule retenue dans la soustraction au niveau des unités.

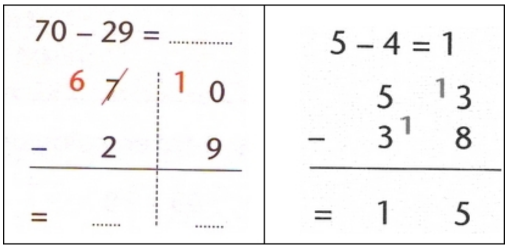

Figure 17 *– Notation de la soustraction avec deux techniques différentes chez Hachette*

Dans leurs exercices ils ont choisi de représenter les unités par des billes et les dizaines par des rectangles contenant dix billes. Pour les auteurs de ce manuel, il serait inutile de travailler la soustraction en colonnes sans retenue si les techniques apprises auparavant n'étaient pas suffisamment maitrisées. Mais il est cependant nécessaire de passer par cet apprentissage, car ils ont remarqué que beaucoup d'enfants se perdaient lorsqu'il y avait plusieurs opérations mentales successives, ainsi poser la soustraction colonnes et l'effectuer permet de mettre tout le monde sur un même pied d'égalité. C'est pourquoi ils ont décidé de commencer par une page d'exercices amenant les élèves à effectuer des soustractions simples sans retenue pour apprendre à les poser. Les auteurs encouragent l'enseignant à faire travailler les élèves en amont de la soustraction posée avec la technique du cassage de la dizaine sur des manipulations avec du matériel numération tel que des pièces et des billets, et d'arriver à faire ressortir les trois manières de procéder pour soustraire : - représenter les deux nombres et les comparer (différence), - représenter le plus petit nombre et le compléter jusqu'à obtenir le plus grand nombre (additions successives), - représenter le plus grand nombre et enlever ce qu'il faut pour obtenir le plus petit nombre (soustractions successives). Quand ils passeront à la « technique traditionnelle », les auteurs conseillent de bien insister sur la conservation des écarts à partir de la propriété : « la différence entre deux nombres reste constante si j'ajoute (ou si j'enlève) le même nombre à chacun d'eux ».

Dans *Euro maths* de chez Hatier (2012) il y a trois pages avec consacrées à la soustraction posée avec trois objectifs principaux :

- prendre conscience en s'appuyant sur la droite numérique, que le résultat d'une soustraction est inchangé si on ajoute un même nombre aux deux termes,
- analyser des procédures de calcul de la soustraction utilisées en calcul mental ou à l'écrit et mettre en œuvre ces procédures de calcul,
- étudier la technique de la soustraction et comprendre qu'elle utilise la propriété de conservation des écarts,
- prolonger la technique usuelle avec des retenues aux centaines.

Les auteurs de ce manuel ont décidé d'utiliser la « technique traditionnelle » pour poser la soustraction. C'est pourquoi, auparavant un autre objectif du manuel se doit d'être acquis :

- prendre conscience en s'appuyant sur la droite numérique, que le résultat d'une soustraction est inchangé si on ajoute un même nombre aux deux termes.

Les élèves auront donc déjà travaillé sur le sens de la conservation des écarts à partir de la méthode russe *(la description de la méthode russe : cf. II)1.)* et de la méthode des sauts. Dans leur ressource pour l'enseignant, ils insistent sur le fait que la conservation des écarts doit être constamment rappelée pendant l'apprentissage de la soustraction posée et qu'il faut maintenir la méthode russe en parallèle

pour que les élèves puissent mettre un sens aux retenues lorsqu'ils posent la soustraction. Il y a donc la ligne graduée qui est utilisée comme matériel numérique. Les auteurs ont choisi de noter par un « 10+ » la retenue qui se rapporte à la dizaine et par un « 1+ » la retenue correspondant à une unité qu'on ajoute. Ils proposent des calculs faisant intervenir une seule retenue dans la soustraction au niveau des unités ou des dizaines.

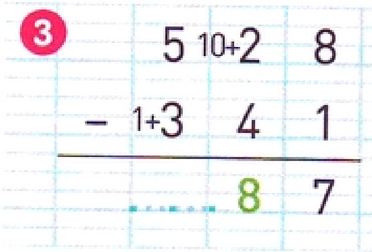

Figure 18 *– Notation de la soustraction chez Euro maths*

Contrairement au précédent manuel, ils ont décidé de ne pas insister sur le calcul en colonne sans retenue, car c'est pareil qu'en ligne et ils ne veulent pas instaurer de mauvais automatismes et parce que le travail systématique sur ce cas entraine la mise en place d'automatisme faux du type « dans chaque colonne je soustrais le plus petit au plus grand ». Il est très conseillé à l'enseignant de pratiquer du calcul mental aux élèves afin de mieux les entrainer à la procédure de la conservation des écarts.

Dans <u>*Classe Maths*</u> de chez Sed (2012) on peut trouver deux double-pages se rapportant à deux séances sur la soustraction posée ayant pour titre : *Je calcule des différences en colonne avec comme points d'appuis : 1) la numération orale et la représentation du nombre, 2) la réorganisation du tout.* Avant de passer à la soustraction posée il y a un travail dans le manuel qui est consacré au calcul réfléchi avec des différences de nombres de deux chiffres travaillées à partir d'une ligne graduée, avec le passage par les dizaines supérieures ou inférieures. Les auteurs procèdent à partir de la technique du cassage de la dizaine pour poser la soustraction. Dans leurs exercices, quand les élèves ont fini d'effectuer la soustraction, les auteurs ont inclus le moyen de vérification par l'addition à trou. Ils peuvent faire intervenir deux retenues dans une soustraction au rang des unités et des dizaines.

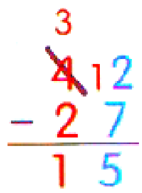

Figure 19 *– Notation de la soustraction chez Classe Maths*

Pour les auteurs de <u>*Classe Maths*</u>, la compréhension de la soustraction posée avec la technique traditionnelle repose sur celle du principe fondamental de notre système de numération et de la rapidité de son exécution à partir de la connaissance des tables d'addition. Pour eux, le calcul posé est associé à l'organisation des nombres. Ils souhaitent donc avant tout que les élèves voient la centaine et la dizaine comme un tout et créer chez eux différentes images mentales du nombre. C'est pourquoi ils ont décidé de représenter les nombres dans leurs exercices : avec un carré vert pour désigner une centaine, un carré rouge pour représenter une dizaine et un point bleu pour indiquer une unité. Leur façon de poser la soustraction est très symbolique.

Dans <u>*J'apprends les maths*</u> de chez Retz (2009) il y a deux pages qui concernent la soustraction posée ayant pour titres : - *La soustraction en colonnes avec des nombres à 2 chiffres* et - *Distinguer les soustractions avec et sans retenue.* Les auteurs ont choisi de poser la soustraction à partir de la technique traditionnelle qui s'automatise plus facilement et prend donc moins de temps à apprendre selon eux. Dans leur manière de poser les retenues ils font bien apparaître la différence entre le « 1 » placé devant le chiffre qui vaut « une dizaine » et le « +1 » en-dessous du chiffre qui vaut « une unité ». Ils se limitent aux soustractions posées avec deux chiffres seulement et donc une seule retenue au rang des unités.

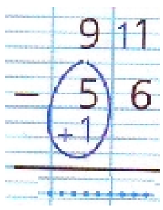

Figure 20 *– Notation de la soustraction chez Retz*

Dans le manuel, la soustraction est traitée dans des situations de comparaison pour que les élèves puissent mieux l'aborder et la comprendre. Les auteurs conseillent aux enseignants d'insister sur le fait que la soustraction permet de résoudre d'autres types de problèmes que ceux où une quantité diminue. Il est aussi écrit que pour faire comprendre la valeur des retenues il faut faire manipuler de la monnaie aux enfants. Afin de vérifier son calcul, il est suggéré aux élèves de comparer leurs résultats avec le matériel du manuel : « un carton de files de boites » (une boite représentant une dizaine et une unité étant représentée par un jeton bleu) qui permet de trouver le résultat par des retraits successifs.

Pour conclure ces recherches, j'ai élaboré un tableau qui montre ce qui se ressemble dans chaque manuel et ce qui les distingue à partir de différents indicateurs :

	Les mathématiques à la DDM	*Euro maths*	*Classe maths*	*J'apprends les maths*
Matériel évoqué	Monnaie	Ligne graduée		Monnaie, matériel de Picbille (jetons et boites), cartons de files numériques
Technique opératoire utilisée	Cassage de la dizaine puis technique usuelle	Technique usuelle et en amont : méthode russe et par sauts	Cassage de la dizaine	Technique usuelle
Moyen de vérification	Aucun	Ligne graduée	Addition à trou	Cartons de files numériques
Représentation des nombres	Les unités sont représentées par des billes et les dizaines par des rectangles contenant dix billes	Aucune	Carré vert : une centaine, carré rouge : une dizaine, point bleu : une unité	Une boite représente une dizaine et les unités sont représentées par des jetons bleus
Nombres choisis	Jusqu'à 3 chiffres pour l'opérande du haut et du bas			Pas plus de deux chiffres par nombre
Retenues	Une seule au rang des unités	Une seule au rang des unités ou des dizaines	Jusqu'à deux aux rangs des unités et des dizaines	Une seule au rang des unités
Sens	La soustraction à retenue peut s'expliquer par un procédé qui correspond à ce que l'on fait matériellement et par la propriété : « La différence entre deux nombres reste constante si j'ajoute (ou si j'enlève) le même nombre à chacun d'eux »	La conservation des écarts doit être constamment rappelée et il faut maintenir la méthode russe en parallèle pour que les élèves puissent mettre un sens à ce qu'ils font lorsqu'ils posent la soustraction.	La compréhension de la soustraction posée repose sur celle du principe fondamental de notre système de numération et la rapidité de son exécution sur la connaissance du répertoire de l'addition.	La soustraction est traitée dans des situations de comparaison pour que les élèves puissent comprendre la signification « comparaison » et mieux aborder et comprendre la soustraction posée.
Justification donnée	Nécessité de passer par l'apprentissage de la soustraction en colonnes sans retenue car beaucoup d'enfants se perdent lorsqu'il y a plusieurs opérations mentales successives, ainsi ça permet de mettre tout le monde sur un même pied d'égalité.	Ils n'insistent pas sur le calcul en colonne sans retenue car c'est pareil qu'en ligne et ils ne veulent pas instaurer de mauvais automatismes	Ils souhaitent avant tout que les élèves voient la centaine et la dizaine comme un tout, créer chez les élèves différentes images mentales du nombre	La technique usuelle s'automatise plus facilement et prend donc moins de temps à apprendre
Calcul mental ou non au début	Pas sur le manuel, mais suggéré en amont dans le guide	Oui (jeu du compte est bon, jeu de mémoire, jeu du furet)	Oui (soustractions)	Oui (furet, addition)

III. ÉTUDES DE CAS.

1. Classe de CE1

Pour ma première observation, j'ai décidé d'aller dans la classe de Séverine, qui enseigne en CE1 depuis 5 ans. Elle utilise plusieurs manuels : le fichier *les mathématiques à la découverte du monde* pour que ses élèves travaillent dessus,et pour créer ses leçons elle s'inspire des fichiers et guides pédagogiques de *CAP Maths* et de *J'apprends les maths*. J'ai observé trois séances : la première sur une approche de la soustraction posée (*Observation n°1 en CE1 : cf. annexe p.6*), la seconde sur la soustraction posée avec la « technique du cassage de la dizaine » (*Observation n°2 en CE1 : cf. annexe p.14*) et la dernière sur la soustraction posée avec la « technique traditionnelle » (*Observation n°3 en CE1 : cf. annexe p.20*). Je les aies ensuite retranscrites en annexe et analysées. J'ai aussi pu avoir un entretien avec elle pour pouvoir en savoir un peu plus sur sa manière de procéder et sur tout ce qu'elle mettait en place derrière ces séances.

1.1 Programmation de l'enseignante

Pour cette enseignante, les pré-requis à avoir avant de poser la soustraction sont : - de savoir poser un calcul en colonnes en alignant les chiffres, - de donner un sens à « une différence entre 2 nombres ». L'enseignante a d'ailleurs fait le choix de partir sur la différence d'âge, de taille et de masse car dans le fichier *les mathématiques à la découverte du monde* c'est de là où ils partent étant donné qu'ils travaillent sur les masses et les unités de longueurs. Et dans un dernier temps, elle donnera un sens sur « ce qu'il manque ». C'est dans cette dernière phase qu'elle va introduire les retenues dans la soustraction posée. C'est la première année où elle insiste autant sur la soustraction posée car elle s'est rendu compte que les enfants ont beaucoup de mal avec cette notion.

En amont pour aborder la soustraction posée, l'enseignante utilise beaucoup de petits matériels pour faire du comptage de cubes, de cahiers, de pailles, de jetons, de stylos, de boites de Picbille (personnage présent dans le manuel de mathématiques aux éditions Hachette). Elle fait aussi travailler ses élèves sur « enlever des dizaines entières, des centaines entières et des unités » et les fait travailler sur la ligne graduée plutôt que sur la piste numérique car il y a un problème de comptage de cases. Elle essaie donc plutôt de leur faire utiliser la ligne graduée pour éviter ce problème.

L'enseignante montre sur la piste numérique (les chiffres sont disposés dans des cases) qui est affichée au-dessus du tableau ce qu'a fait Ballou (compter la case de départ comme « 1 »)

Enseignante : Quelle est la bêtise qu'elle a faite dans sa tête ?
Sara : Elle a compté 40.
Enseignante : Quand on est sur une piste comme ça comme pour le jeu de l'Oie, les petits chevaux, est-ce que l'on compte la case sur laquelle on est ?
Élèves : Non !
Ballou : Bah si.
Enseignante : Eh béh non ! On se met sur la case sur laquelle on doit partir et on compte « un » que lorsqu'on s'est déplacé […] et là on arrive bien à 37.

Dans la séquence qu'elle a prévue, il y a dix séances pour pouvoir réfléchir, pour s'interroger et pour communiquer, et jusqu'à la fin de l'année, la soustraction sera posée. Dès qu'il y a une phase de calcul mental ou de calcul posé, les élèves font des soustractions sur le cahier, ils auront à mélanger du « + », du « - », du « × », … L'enseignante ne leur fait jamais faire que des additions ou que des soustractions. En effet, dès que les élèves apprennent une nouvelle opération, elle leur donne plusieurs exercices en mélangeant plusieurs types d'opérations sinon les élèves ne font pas attention et ils vont être dans un système de réflexes en procédant machinalement par des mécanismes. Par exemple, lors de la séance d'introduction de la soustraction posée que j'ai observée, une élève avait bien posé sa soustraction, mais additionnait les nombres entre eux.

Awa : On a dessiné le grand-père et le fils, et on a calculé « 59-57 »
Enseignante : « 59-57 » ?
Awa : « 69-57 », après on a fait une opération, on a fait en colonne, on a calculé : « 9+7 = 18 » on a mis la retenue et après on a fait « 6+5 » … euh « 6-5 … égal euh … 1 ». Et après on a vu que ça faisait 18. [...]
Enseignante : Donc la vous êtes d'accord avec moi que le groupe d'Awa s'est trompé dans le calcul, d'après vous qu'ont-ils fait ?
Alexandre : Elle a fait « 9+7 »
Enseignante : Oui, vous m'auriez marqué 16 ans j'aurais compris, mais en plus d'avoir fait « 9+7 » vous vous êtes trompés de résultat.

Ou bien par habitude les élèves additionnaient les chiffres entre eux au lieu de les soustraire.

Enseignante : 7-9 ce n'est pas possible, je vais donc prendre une dizaine ici et il m'en restera 2, et là ça fera 17. Et « 2 - 1 » est égal à …
Elèves : 3 !
Enseignante : Ah nan ! On ne fait pas « + » hein ! On fait « - », c'est donc …
Elèves : 1 !

Pour l'enseignante, il est donc important de mêler à la fois des soustractions et des additions pour habituer ses élèves à être vigilants.

L'enseignante apprend dans une première séance à ses élèves à disposer la soustraction sans les retenues. Pour commencer ils font un rappel de la définition de la soustraction.

Puis dans une seconde phase elle leur fait faire du calcul mental sur des soustractions en leur donnant le moyen de vérifier sur la ligne graduée. Dans une troisième phase elle leur donne un problème avec une soustraction à résoudre par groupe de 3 en imposant de poser une opération à un moment donné de leur démarche. Elle leur fait donc résoudre la soustraction posée sans retenue avec ce qu'ils connaissent de l'addition (ils ont déjà effectué des additions à trou sans retenue). Dans une quatrième phase les élèves proposent leurs réponses en détaillant leurs calculs.

> Au tableau est noté la soustraction posée : *69 - 57*
>
> **Enseignante :** Qui se sent capable de me résoudre cette opération ?
> **Wassim :** Je pars du plus grand chiffre et je compte à l'envers : « 8...7...6...5...4..3 » et je marque 2, après je fais la même chose pour ici : « 5...4...3...2 » je marque 1.

Dans une cinquième phase ils font l'opération tous ensemble au tableau pour vérifier. L'enseignante insiste beaucoup sur le formalisme de la présentation de l'opération : propre et bien présenté.

> **Enseignante :** Qui peut me dire comment je fait pour poser une opération sur une feuille de cahier ?
> **Léane :** Je marque 69 en haut en laissant une ligne au-dessus au cas où il y ait des retenues et je laisse de la place en dessous pour pouvoir poser mon opération.
> *L'enseignante écrit en même temps au tableau. Elle met 2 chiffres dans un carreau.*
> **Léane :** Non maitresse, dans un carreau il ne peut y avoir qu'un chiffre. […] Après on marque « - » mais pas dans le carreau du dessous, juste celui d'à-coté, et 57 dans un carreau un chiffre. Après sur l'interligne en-dessous on fait un trait.

L'enseignante leur montre bien que la soustraction est l'opération inverse de l'addition et leur donne ce moyen pour pouvoir vérifier leur résultat. De plus, elle anticipe le fait qu'ils pourraient confondre le « plus » et le « moins ».

Dans une seconde séance, un mois plus tard, quand les élèves ont bien maîtrisé la soustraction posée sans retenue, l'enseignante leur donne un problème où il faut faire une soustraction avec retenue, mais sans leur expliquer le fonctionnement de la soustraction posée avec retenue. Elle les laisse chercher en groupe comment résoudre le problème, sans leur imposer de poser l'opération. N'ayant pas les connaissances suffisantes et nécessaires pour résoudre une telle opération, les élèves qui ont décidé de poser la soustraction, additionnent les chiffres des unités entre eux ou bien posent le nombre le plus grand soustrait au plus petit.

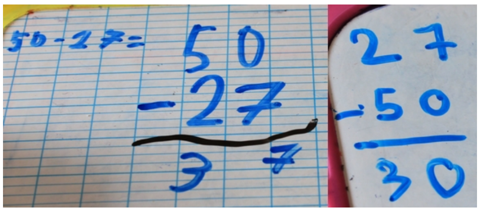

Figure 21 *– Soustraction posée avec retenue, sans les connaissances suffisantes*

D'autres élèves se rendent vite compte que l'opération n'est pas possible à résoudre avec les connaissances dont ils disposent, ils ont donc recours à d'autres méthodes : à la place de la poser, ils vont se reporter à la piste numérique ou bien à du matériel de numération. L'enseignante reviendra sur ces méthodes en classe entière.

L'enseignante montre à toute la classe ce que le groupe de Ballou a fait pour poser la soustraction « 50-25 » en prenant le matériel de numération que chaque élève détient (des rectangles rouges représentant des dizaines et des billes bleues représentant des unités).

Enseignante : Avec leur matériel de numération ils avaient 50 et ils ont enlevé 20, ils devaient ensuite enlever 7, mais … problème ! Il fallait enlever des unités donc ils ont remplacé 1 dizaine par 10 unités et comme ça ils ont pu enlever les 7. Ils ont regardé combien il en restait et ils en sont arrivés à la conclusion que 50-27 était égal à … 23

Ainsi, à partir de cette manipulation du matériel de numération, l'enseignante peut rebondir sur la technique du « cassage de la dizaine », qui correspond à la même manipulation où on va « chercher dans la dizaine » ce qu'il « manque dans les unités ». Elle va leur faire poser la soustraction avec du matériel numérique pour qu'ils assimilent plus simplement la façon de procéder quand ils poseront la soustraction et qu'ils auront affaire à des retenues.

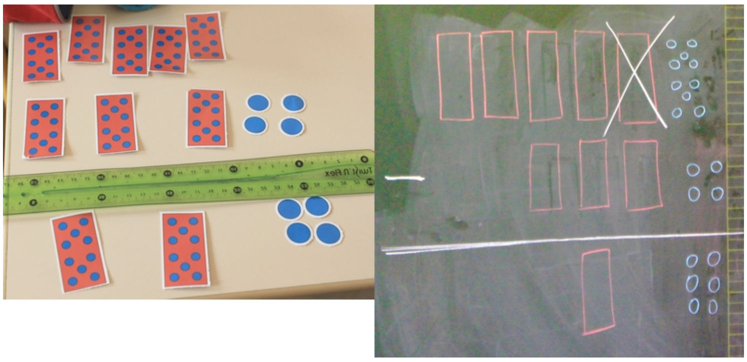

Figure 22 *– Soustraction posée représentée au tableau avec le matériel numérique*

Ils font la même chose juste après par écrit en essayant de se représenter le matériel de numération. Quand le chiffre d'en-haut sera plus petit que celui d'en-bas, donc que la soustraction des deux chiffres ne sera pas possible, ils vont casser la dizaine d'à-côté en 10 unités. Dans la ***Figure 23*** ils noteront donc un grand « 1 » en face du 0 des unités pour représenter les 10 nouvelles unités, et ils barreront le « 5 » des dizaines pour le transformer en 4 dizaines, puisqu'ils en auront emprunté une à côté. C'est exactement ce qu'ils avaient fait avec le matériel de numération.

Pour la soustraction « 50 - 34 »

Enseignante : Vous allez ranger et je vais vous montrer la technique qu'on va faire dans un premier temps et vous allez voir que plus tard on en aura une autre. […] Quand je fais une addition en colonne, je commence par quoi ?
Élève : Par les unités parce qu'il peut y avoir des dizaines cachées.
Enseignante : Oui et là pour la soustraction c'est pareil on commence par les unités parce qu'on va avoir besoin de piocher des unités dans les dizaines. Quand on voit « 0 unité moins 4 dizaines » on se dit quoi ?

Alexandre : ça se peut pas
Enseignante : Oui donc où va-t-on les chercher ?
Élèves : en piochant
Enseignante : Oui tout de suite je note que j'ai plus 5 dizaines, mais 4 .

L'enseignante barre les « 5 dizaines » pour les transformer en « 4 dizaines » et rajoute un « 1 » en face du zéro des unités.

Enseignante : Ensuite comment vous avez fait pour avoir 6 unités dans le résultat ?
Imane : Je suis partie de 10 et j'ai reculé de 4 pour trouver 6.
Enseignante : Autre solution ?
Mathéo : J'ai 4 dans ma tête et je compte jusqu'à 10.
Enseignante : Oui la technique la plus facile est celle de Mathéo, je vous conseille de partir du plus petit nombre pour aller vers le plus grand nombre.

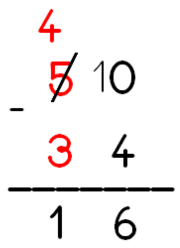

***Figure 23** – Soustraction posée avec le « cassage de la dizaine »*

Une fois qu'ils ont trouvé leur résultat, comme moyen de vérification pour la soustraction posée avec le « cassage de la dizaine », elle leur fait utiliser la ligne graduée. Ils ont déjà travaillé sur cette ligne graduée pendant l'année.

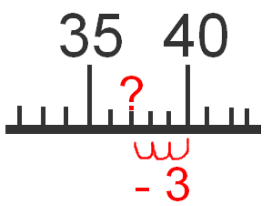

***Figure 24** – Utilisation de la ligne graduée*

Pour l'utiliser ils partent du premier opérande et ils reculent de *x* fois le deuxième opérande. La graduation sur laquelle ils arrivent leur donne le nombre correspondant au résultat recherché.

La troisième fois que je suis venue observer la classe, deux semaines plus tard, l'enseignante commençait par faire corriger des devoirs au tableau. Les élèves devaient poser des soustractions à une retenue au rang des dizaines ou des unités avec le « cassage de la dizaine ». Dans l'ensemble ils ont tous réussi, sauf deux élèves qui ne comprenaient pas cette méthode. L'enseignante leur a ensuite proposé une nouvelle séance avec une première phase de manipulation en numération avec des pièces et des billets où ils allaient pouvoir se rendre compte que « quand on ajoute « 10 » à deux nombres, la différence entre ces deux nombres est toujours la même », c'est à dire la propriété de l'équivalence.

Enseignante : Nous allons jouer aujourd'hui au jeu des tirelires, alors on y va. Le jeu des tirelires c'est bien simple … le but c'est que dans chaque équipe il y ait deux « tirelires », tous ceux qui ont de l'argent vous êtes des tirelires donc vous gardez l'argent, et au milieu il y a des banquiers. Quand on a trop d'argent dans sa tirelire on va les mettre à la banque. Quand on a besoin d'argent on va à la banque. Vous allez voir que ce qui va se passer c'est qu'on va mélanger les billets. Toutes les « tirelires » vont d'abord compter combien elles ont dans leur tirelire. On compte pas le nombre de billets hein, on compte la valeur des billets ! Et vous le notez sur votre ardoise que vous rangez pour être sûr de ne pas oublier. Et vous demandez au banquier de vérifier, si vous ne vous êtes pas trompés dans vos comptes.
[...]
Enseignante : La tirelire de droite a besoin de 60€. Vous avez plein de façons de donner 60€. Ensuite les banquiers vous donnez à la tirelire de gauche 50€. Tirelire de droite combien avez vous ?
Jessy-Karel : 180€
Enseignante : Tirelire de gauche combien avez-vous ?
Jakub : 200€
Enseignante : Quel calcul dois-je faire monsieur le banquier pour calculer la différence entre les deux tirelires ?
Alexandre : « 200-180 »
Jessy-Karel : ça fait 20€ de différence
Enseignante : Maintenant donnez 10€ à toutes les tirelires. Tirelire de droite combien j'ai ?
Aurélia : 190€
Enseignante : Tirelire de gauche ?
Aurélia : 210€
Enseignante : Maintenant le banquier va nous poser la soustraction.
Léane : « 210-190 »
[…]
Enseignante : Quelle est la différence ?
Léane : 20
Enseignante : Je comprends pas, pourquoi on a la même différence entre les tirelires alors que les calculs sont pas les mêmes ? Pourquoi la différence c'est la même que tout à l'heure ?
Alexandre : Parce que le banquier il a donné 10€ à chacun donc du coup ça peut pas changer parce qu'il a donné 10€ à chacun donc c'est la même différence.
Enseignante : Oui exactement, le banquier a donné la même chose dans les deux tirelires alors on a la même différence de somme.

A partir de là ils vont pouvoir appliquer la connaissance sur les équivalences en posant directement la technique de la soustraction avec la « méthode traditionnelle » que tout le monde connait. Ils ne poseront pas de soustraction avec des nombres de plus de trois chiffres, ni comportant plus d'une retenue.

Enseignante : Très bien alors maintenant je vous donne une soustraction et on va voir si on peut l'appliquer : « 55-17 » . Qu'est ce qu'on ferait nous ?
Élève : On casserait une dizaine.
Enseignante : Oui alors maintenant nous on va appliquer ça, vous êtes d'accord que j'ai pas assez d'unités pour calculer « 5-7 » c'est pas possible, donc je décide d'ajouter « 10 » au premier nombre ça fait combien là ?
Ballou : 15
Enseignante : Qu'est ce que je dois faire pour que la différence reste la même, si j'ajoute « 10 » au nombre d'en-haut ?
Thomas : J'ajoute 10 au nombre d'en bas.
Enseignante : Oui donc où est ce que je vais les rajouter ?
Sara : A coté de la dizaine.
Enseignante : J'ai « 1+1 » ici, et ça fait « 2 » donc « 5-2 » ?
Lana : 3
Enseignante : Donc quelle est la différence entre les deux ?
Élève : 38

$$\begin{array}{rcc} & 5 & {}^{1}5 \\ - & {}_{+1}1 & 7 \\ \hline & 3 & 8 \end{array}$$

Figure 25 *– Soustraction posée avec la technique traditionnelle*

L'enseignante utilise des arguments visant à montrer que la soustraction posée avec la « technique traditionnelle » avec des retenues est moins chargée que la soustraction posée avec « le cassage de la dizaine ». Mais seulement si on regarde des travaux d'élèves, malgré cette notation moins chargée, les élèves ne mettent pas autant de sens aux retenues que dans le « cassage de la dizaine ».

Le temps d'apprendre la soustraction posée et de bien comprendre son fonctionnement, l'enseignante laissera des affichages dans la classe qui expliquent comment utiliser les deux méthodes, ainsi elle pourra voir quels élèves en ont souvent besoin et lesquels sont en difficulté. Si on observe l'affichage de la ***Figure 26*** pour « la technique traditionnelle », on voit bien que la notation correspond bien à celle proposée par l'enseignante, quant au discours il est à peu près le même que celui que tiennent les élèves, mais l'enseignante ne leur impose pas forcément de dire pourquoi c'est impossible « je ne peux pas le faire car ... zéro est plus petit que cinq ».

Enseignante : La suivante Siloé je t'écoute et Louise tu viendras la poser et l'effectuer.
Siloé : « 402 - 151 »
Louise : On commence par les unités « 2-1 = 1 ». « Zéro dizaine moins 5 unités », je prends une dizaine à coté ça fera 10 unités et 3 centaines. « 10 - 5 » *(elle décompte sur ses doigts)* ça fait « 5 ». Et « 4-1=3 ».
Enseignante : Très bien, résultat Louise ?
Louise : 351

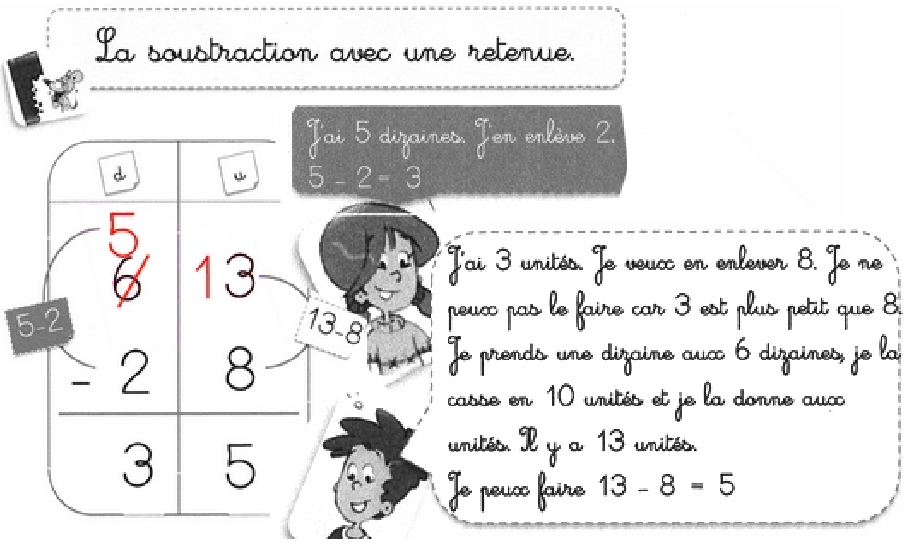

Figure 26 *– Affichage sur la soustraction posée avec le « cassage de la dizaine »*

1.2 Du côté des élèves

L'enseignante a remarqué, dans ses anciennes classes de CE1, que la plus grande difficulté qui revenait fréquemment chez les élèves, était liée au fait qu'ils ne voyaient pas d'où venaient les retenues et à quoi elles correspondaient en posant la soustraction avec la « technique traditionnelle ». Avec le « cassage de la dizaine », ils y arrivaient beaucoup mieux, il n'y avait pas ce problème d'après les résultats des opérations qu'elle leur proposait. Elle a aussi remarqué que les élèves faisaient aussi très souvent des fautes d'inattention : ils confondent le « + » et le « - ». Du point de vue du sens, il y a aussi quelques enfants qui psychologiquement n'arrivent pas à « enlever » : passer par le « - », « perdre (des bonbons, des points, des stylos) » c'est quelque chose de difficile pour eux, c'est lié à l'affect. C'est d'ailleurs pour ça que l'enseignante a décidé de commencer à donner le sens de la soustraction par « la différence », ainsi il y a moins de connotations affectives. En ce qui concerne les difficultés qui vont perdurer dans le temps et qui restent récurrentes, ce sont des problèmes par rapport à la façon de poser le calcul et par rapport à la valeur de la retenue qui peut valoir une unité ou bien une dizaine.

Pour faire poser la soustraction traditionnelle aux élèves en fin de CE1, elle leur fait écrire un très grand « 1 » qui vaut 10 pour ajouter une dizaine au grand nombre et un « +1 » plus petit pour ajouter une unité au petit nombre qu'elle fait disposer en bas en l'entourant. Mais de temps en temps les élèves décalent le « +1 » d'une classe car ils n'y mettent pas de valeur, ils ne font pas de corrélation entre les différentes dizaines. Pour lutter contre ce phénomène, cette année l'enseignante a beaucoup fait travailler ses élèves sur la numération en y passant plus de temps que les années précédentes avant d'entamer les calculs posés.

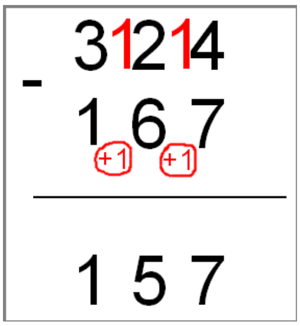

Figure 27 *– Présentation de la soustraction posée avec la « technique traditionnelle »*

1.3 Du côté de l'enseignante

Ce que l'enseignante veut que ses élèves comprennent, c'est que la valeur de la différence entre deux nombres ne varie pas quand on ajoute quelque chose, donc il faut absolument manipuler pour arriver à ça et pour qu'ils mettent du sens sur ce qu'ils font. Sinon ils vont appliquer une technique sans la comprendre. Elle insiste beaucoup sur le sens en essayant de donner des moyens mnémotechniques aux élèves pour pouvoir s'approprier le sens de ces deux méthodes. Ainsi elle a donné le nom du « dix - dix » à la « méthode traditionnelle » pour ne pas que les élèves perdent de vue que cette technique repose sur le principe de l'équivalence. Et la technique du « casse » pour le « cassage de la dizaine ». Les élèves ont beaucoup travaillé sur l'addition au début de l'année, donc poser la soustraction sans retenue ne lui pose pas de problème pour l'enseigner. Là où elle rencontre une difficulté lorsqu'elle explique comment poser la soustraction, c'est au niveau de la valeur de la retenue et la valeur de sa place, car pour les élèves la retenue « 1 » vaut toujours « 1 » unité. Tandis que dans le « cassage de la dizaine » ça ne pose aucun problème, si ce n'est la présentation parce que c'est trop chargé visuellement.

Pour l'enseignante, la soustraction posée est bien trop difficile pour des CE1. Pour les élèves, il y a encore trop de charges affectives, il n'y a pas assez de sens et pas assez de recul en mathématiques pour pouvoir tout comprendre. Ce qui l'ennuie c'est d'imposer une méthode sans que les élèves y mettent du sens, pour elle ce n'est pas raisonnable et pas pédagogique de leur enseigner une méthode qu'ils ne vont pas comprendre. Elle trouve ça regrettable que dans les programmes de 2008 la soustraction posée avec retenues n'ait pas été décalée au CE2, surtout que les programmes y sont moins chargés. Il aurait été plus opportun, selon elle, en CE1 qu'ils se concentrent seulement sur la technique de la soustraction posée sans retenue ou avec le « cassage de la dizaine » et aux multiplications et aux additions.

1.4 Au sein de l'école

Lors des premières évaluations nationales de CE1, les enseignantes de l'école se sont rendu compte qu'il fallait utiliser la même méthode pour poser la soustraction. En effet, quand elles s'échangeaient les cahiers de leurs élèves pour corriger les exercices, certaines ne comprenaient pas la technique du « cassage de la dizaine ». Pour discuter de cette harmonisation, il y a eu un conseil d'école sur la soustraction. Autrement, les enseignants en parlent souvent dans des réunions informelles. Il a donc été important de coordonner les méthodes au sein du cycle 2 car les enseignantes de cette école n'utilisaient pas toutes la même technique pour enseigner à leurs élèves la façon de poser la soustraction. Il était donc difficile pour les maitresses de CE2 de savoir par où commencer et pour elles, c'était assez aberrant de « casser la dizaine ». Celles-ci ne se sont pas interrogées si il y avait une bonne méthode, mais se sont dit qu'il fallait arriver en fin de CE1 avec la « technique traditionnelle ». En effet, c'est la méthode qu'utilisent les parents : les maitresses du cycle 3 avaient utilisé cet argument en montrant que c'était donc plus lisible pour eux s'ils voulaient aider leurs enfants. Cependant, le groupe enseignant a décidé de laisser la démarche pédagogique complètement libre dans les classes. C'est pourquoi l'enseignante du CE1 a tout de même préféré garder la méthode du « cassage de la dizaine » dans sa démarche. Elle a remarqué que « casser la dizaine » était plus porteur de sens pour les élèves. Il y a donc un mixte des deux techniques pendant l'année dans sa classe de CE1, mais elle veut qu'ils parviennent tous à la méthode usuelle en arrivant au CE2. Avant cette harmonisation, elles étaient deux maitresses sur trois de CE1 à vouloir garder le « cassage de la dizaine » et laisser la « technique traditionnelle » au CE2 car elles trouvaient que les enfants étaient plus mûrs et plus mâtures dans ce niveau. Mais les enseignantes de CE2 étaient plus anciennes et ne voulaient pas changer leur méthode donc les jeunes enseignantes ce sont adaptées.

Par cette harmonisation, en fin de CE1 tous les élèves doivent connaitre la « technique traditionnelle » pour pouvoir poser la soustraction. Mais l'enseignante interrogée fera un CE2 l'année prochaine, donc si elle ne parvint pas à faire comprendre la technique usuelle à ses élèves parce qu'ils manquent de maturité, elle se permettra une marge en continuant avec le « cassage de la dizaine ». Cependant, s'ils restent à cette méthode, il faut absolument mettre un mot dans le carnet de correspondance pour prévenir les parents ou les informer pendant une réunion en leur expliquant la technique. À terme, tous les élèves devraient arriver avec la « technique traditionnelle » en fin de CE2. En attendant, elle leur laisse le choix d'utiliser la méthode avec laquelle ils se sentent le plus à l'aise. Pour le moment il s'agit du « cassage de la dizaine » pour la majorité de la classe (seulement 3 élèves ont du mal avec cette méthode).

2. Classe de CM1

Je me suis rendue par la suite dans une classe de CM1 qui allait apprendre la soustraction posée avec des nombres décimaux. Je trouvais ça intéressant de voir quelles erreurs pouvaient continuer à subsister dans ce niveau et de voir quelles difficultés dans la soustraction pouvaient apparaître avec les décimaux. J'ai donc retranscrit la séance en annexe *(Observation n°4 : cf. annexe p.20)* et analysé la séance ainsi que les productions des élèves.

L'enseignante, de la classe de CM1 que j'ai observée, s'inspire de *CAP maths*, mais elle n'utilise pas tout le temps ce fichier, car elle s'en était servi en début d'année avec les élèves et ils n'avaient pas bien compris une leçon de numération. Elle pense que ça marche bien avec les élèves qui percutent, mais difficilement avec les autres.

Avant de passer à la soustraction posée sur les nombres décimaux, l'enseignante a commencé par faire poser l'addition à ses élèves sur des nombres décimaux. Puis une fois que la technique opératoire est assimilée sur l'addition, elle est passée à l'apprentissage de la soustraction posée sur les décimaux en veillant à ce que les élèves sachent faire la différence entre la partie entière et la partie décimale.

Enseignante : Qu'est-ce qu'un nombre décimal ?
Élève : Un nombre avec une virgule.
Enseignante : Oui déjà. Ensuite ?
Élève : Il peut s'écrire sous la forme d'une faction décimale.
Élève : Un nombre qui a pour dénominateur 10 ou 100 ou 1000.
Enseignante : Oui ensuite ?
Élève : Il a une partie entière et une partie décimale.
Enseignante : La partie entière est placée avant ou après ?
Élève : Avant.
Enseignante : Et la partie décimale ?
Élève : Après.
Enseignante : De quoi est constituée la partie entière et de quoi est constituée la partie décimale ?
Élève : La partie entière d'unité, de dizaine, de centaine, d'unité de 1000, de dizaine de 1000, de centaine de 1000.
Enseignante : Oui et on peut continuer encore au-delà. Et la partie décimale maintenant ?
Élève : De dixième, de centième, de millième.
Enseignante : Oui et on s'était arrêtés là pour l'instant.

Après s'être assurée que les élèves faisaient bien la distinction entre les deux, elle leur a proposé une soustraction à résoudre sans indication particulière avec des nombres à deux chiffres dans la partie entière et à trois chiffres dans la partie décimale : « 24,385 - 13,451 », dans l'ensemble les élèves ont tous réussi puisque la seule difficulté venait des retenues. Pour compliquer la chose, l'enseignante leur a ensuite donné la soustraction : « 12,59-7,3 », la partie décimale étant composée de deux chiffres dans un nombre et d'un seul dans l'autre pouvait poser problème à certains élèves.

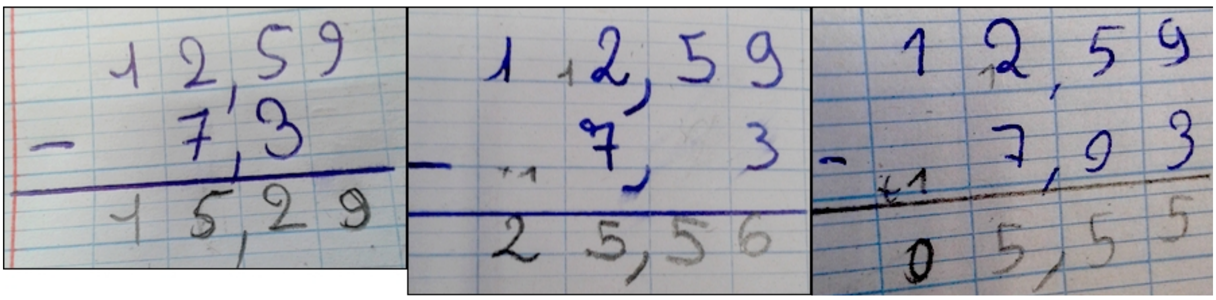

Figure 28 *– Résolutions par les élèves de « 12,59-7,3 »*

En effet, dans la première soustraction de la ***Figure 28***, l'élève avait bien disposé les chiffres et commencé à bien calculer mais n'a pas pensé à écrire les retenues donc son résultat est faux. Dans la seconde opération, l'élève ne savait pas comment disposer son opération et a placé les « 3 dixièmes » tout à droite sous les « 9 centièmes » en pensant que ça fonctionnait comme pour la partie entière où tous les chiffres sont placés à droite. Et cette fois-ci l'élève marquait ses retenues, mais ne les calculaient pas forcément. La plupart des élèves de cette classe de CM1 ne semblent donc visiblement pas mettre de sens aux retenues de la soustraction. En effet, ils appliquent la technique de façon mécanique car ils savent que quand on met un « 1 » en haut on rajoute un « +1 » dans le rang supérieur en-bas, mais le fait qu'ils ne le calcule pas prouve qu'ils n'ont pas acquis le sens de cette retenue et ne savent pas l'utiliser correctement. Concernant la partie décimale, ils comprennent qu'il y a des « zéros » en plus qu'il faut faire apparaître, mais ne savent pas forcément où les placer parce qu'ils ne maîtrisent pas encore assez bien la composition des nombres décimaux avec les nouveaux rangs des dixièmes, des centièmes, des millièmes, ...

Enseignante : Oui donc on aligne bien les dixièmes sous les dixièmes et les unités sous les unités. Quand on a une opération à poser les zéros inutiles peuvent devenir utiles.

Tout comme l'enseignante précédente de CE1, cette enseignante insiste sur le formalisme de la présentation de la soustraction posée

La virgule est dans un carreau sur le nouvel exemple.
Enseignante : Qu'est-ce qui ne va pas ?
Élève : Le carreau c'est pour le chiffre
Enseignante : Oui donc on ne prend pas un carreau entier pour une virgule, on écrit le chiffre des unités et tout de suite la virgule sur la ligne qui sépare les deux chiffres.

Avant d'entamer des exercices individuels, l'enseignante met au clair les règles de la soustraction posée avec retenue. Ce qui change avec la soustraction posée des nombres entiers c'est la virgule qui doit être placée sur la ligne et non pas dans un carreau, les dixièmes doivent être placés sous les dixièmes, les centièmes sous les centièmes et ainsi de suite, et il faut écrire tous les zéros « inutiles » dans la partie décimale pour pouvoir bien calculer sans risquer de faire des erreurs.

Enseignante : On rappelle les règles principales pour la soustraction. A quoi doit-on faire attention quand on a deux nombres décimaux à soustraire ?
Élève : La virgule sur la ligne.
Élève : Aux dizaines sous les dizaines, aux unités sous les unités, aux centaines sous les centaines, les dixièmes sous les dixièmes, ...
Enseignante : Quoi d'autre ?
Élève : Mettre un chiffre par carreau.
Élève : Il faut mettre le plus petit nombre en haut.
Élève : Il faut écrire les zéros sous la partie décimale.
Enseignante : Les règles de la soustraction sont les mêmes règles que la soustraction des nombres entiers.

Au tableau est noté :

- ➔ d. sous d. - u. sous u. - dix sous dix - cent sous cent - mill. sous mill.
- ➔ Virgule → sur la ligne
- ➔ 1 chiffre par carreau
- ➔ nombre décimal + grand - nombre décimal + petit
- ➔ écrire les « 0 » sous la partie décimale

Pour terminer sa séance, l'enseignante donne aux élèves des exercices d'application où ils doivent calculer trois soustractions. Comme c'est la première fois que les élèves posent la soustraction posée avec des nombres décimaux, l'enseignante veille à ne pas mettre plus de 4 chiffres dans un nombre et peut aller jusqu'à leur faire poser des soustractions à 3 retenues. Quand ils ont terminé, l'enseignante fait venir les élèves un par un à son bureau pour pouvoir les corriger. Quand elle corrige les cahiers et qu'elle voit des erreurs, elle note toujours à côté de quel type d'erreur il s'agit. Si des élèves n'ont pas compris, elle leur explique les erreurs qu'ils ont faites et cherche à leur faire comprendre pourquoi ils ont fait ces erreurs jusqu'à ce qu'ils les comprennent. Si elle s'apercevrait que plusieurs élèves faisaient sans cesse le même type d'erreurs, elle scinderait la classe en deux à un moment de la journée et elle leur expliquerait plus amplement ce qu'ils n'ont pas assimilé, pendant que l'autre moitié de la classe travaillerait en autonomie sur les soustractions. C'est une manière de faire de la différenciation. Les erreurs qui reviennent le plus souvent sur les cahiers des élèves sont celles où ils n'écrivent pas les zéros « inutiles » dans la partie décimale du plus grand nombre. Ils laissent donc un espace vide et calculent la rangée comme si le chiffre d'en-bas se mettait à la place du vide. Dans la ***Figure 29*** l'élève a ainsi fait « 5 - 0 = 5 » au lieu de « 0 - 5 ce n'est pas possible ». Pourtant l'enseignante avait fait un rappel de cette règle juste avant.

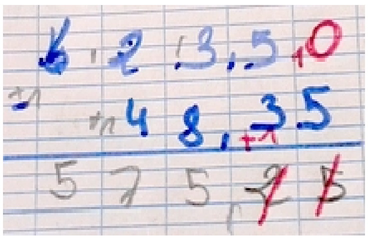

Figure 29 *– Soustraction posée sans le « zéro » dans la partie décimale*

Il y a aussi des erreurs où les élèves ne notent pas leurs retenues, mais savent qu'elles existent donc ils les calculent de tête et souvent ça les induit en erreur parce qu'ils peuvent en oublier. Ou encore dans certaines copies on s'aperçoit que les élèves notent bien leurs retenues, mais ne les calculent pas car ils n'y mettent pas de sens et ont simplement acquis un certain automatisme. Dans le calcul de la ***Figure 30***, l'élève note à l'identique le « 1 » signifiant la retenue d'une unité et le « 1 » pour la dizaine, il les place tous après les chiffres, ce qui prouve qu'il n'a pas compris que le « 1 » à côté du « 7 » sert à ajouter une dizaine. Il applique la méthode qu'on lui a apprise de façon mécanique sans chercher à la comprendre et c'est ainsi qu'il fait des erreurs liées à la valeur de la retenue.

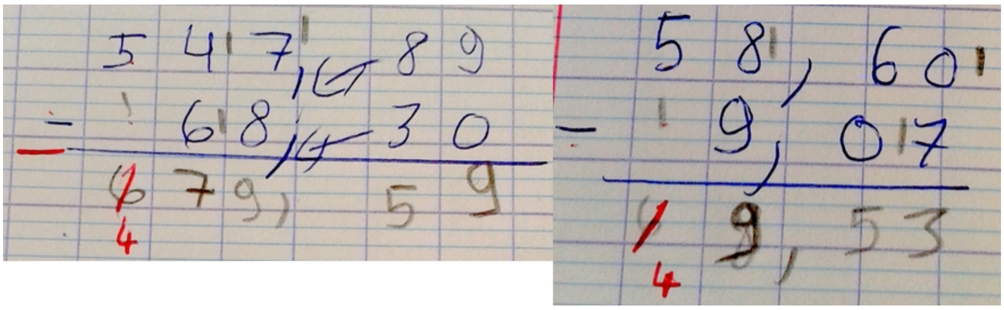

Figure 30 *– Soustraction posée sans donner de sens aux retenues*

3. Enquêtes auprès des enseignants

Un professeur de cette école, qui exerce depuis 5 ans en CM1, utilise la méthode traditionnelle car il trouve le cassage de la dizaine plus compliqué. Il avait déjà utilisé la méthode du « cassage de la dizaine » dans une de ses classes précédentes, mais il trouvait qu'il y avait « une surcharge de retenues dès lors qu'il y avait des zéros dans les nombres ». Lorsqu'il pose la soustraction au tableau avec la « technique traditionnelle » il procède avec la retenue en haut qui vaut « 10 » et la retenue en bas qui vaut « 1 ».

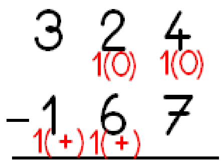

Figure 31 *– Présentation de la soustraction posée dans une classe de CM1*

Mais si un élève arrive d'une autre école avec une autre technique pour poser la soustraction que celle qui est utilisée dans la classe, il le laissera garder sa technique. Selon lui, ce qui est important de faire comprendre aux élèves c'est la méthode, en effet la compréhension de l'écart peut venir plus tard. Il fait souvent des rappels de la soustraction posée pendant l'année à ses élèves de CM1, même si ce n'est qu'une révision. Pour cet enseignant, la soustraction mentale est un pré-requis à avoir pour passer à la soustraction posée. Dans les copies de ses élèves, les erreurs les plus courantes qu'il rencontre sont celles des retenues. Il ne pense pas qu'il est important d'harmoniser les méthodes avec ses collègues à propos de la soustraction posée.

Une professeur qui exerce depuis 2 ans en classe de CE2 utilise le manuel *Le nouveau maths élem.* CE2 de chez Belin. Elle applique la méthode classique « avec les retenues en-haut et en- bas » et n'a jamais enseigné d'autre technique car elle connait que celle-ci.

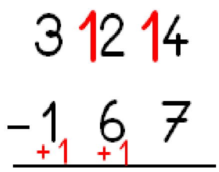

***Figure 32** – Présentation de la soustraction posée dans une classe de CE2*

Elle aimerait que ses élèves comprennent le sens de la soustraction. Les pré-requis pour passer à la soustraction posée sont, selon elle, de comprendre le sens des nombres (qui sont composés d'unités, de dizaines et de centaines), de connaître l'addition et de comprendre la différence entre « nombre » et « chiffre ». Elle consacre une séquence composée de six séances sur la soustraction posée avec des rappels toute l'année. En calcul mental, elle fait travailler les élèves sur des situations problèmes pour qu'ils puissent comprendre le sens de la soustraction et le lien avec l'addition. Avec la méthode classique, les difficultés qu'elle rencontre dans les copies de ses élèves sont les oublis de retenues d'en-bas, les retenues mal placées, ainsi que des nombres qui sont mal alignés dans l'opération posée. Elle a aussi remarqué que les élèves ne se posaient pas toujours la bonne question au début « Dois-je faire 4 - 7 ? Ou bien 7 pour aller à 4 ? », ils ont donc une difficulté à se rendre compte que le calcul peut être impossible. Pour qu'ils vérifient leur résultat elle leur fait poser l'addition : *« résultat trouvé » + « ce qui est retiré » doit être égal au « nombre de départ »*. Cette enseignante pense qu'il est important de se consulter par avance avec ses collègues pour pouvoir accorder leurs techniques d'apprentissages sur la soustraction posée. Si un élève arrive d'une autre école avec une façon différente de poser la soustraction que celle de la classe, elle lui apprendrait la sienne, mais en lui laissant le choix de garder celle qu'il préfère. Cette professeur pense qu'il est nécessaire de faire parler les élèves pendant qu'ils posent la soustraction au tableau et qu'ils fassent un raisonnement dans leur tête tel que : « 4 - 7 c'est impossible, donc je rajoute une retenue, donc je rajoute +1 en-bas ... », il faut qu'ils se répètent toujours le même schéma, ceci afin qu'ils aient des questions automatiques à se poser. Mais si on observe de plus près cette formulation on aperçoit que le sens n'est pas du tout mis en avant et qu'on travaille plutôt sur des automatismes à acquérir pour poser la soustraction quand il y a des retenues.

Une autre enseignante qui enseigne depuis 2 ans en CE2 utilise la manuel *A portée de Maths* CE2 de chez Hachette. Elle procède à une première approche de la soustraction posée en travaillant sur l'écart entre deux nombres sur une droite numérique en faisant un schéma. Et dans un second temps elle fait effectuer à ses élèves un calcul posé avec la méthode traditionnelle qui consiste « à retirer le chiffre d'en-bas au chiffre d'en-haut : d'abord au rang des unités, puis à celui des dizaines ».

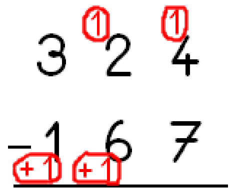

Figure 33 *– Présentation de la soustraction posée dans une autre classe de CE2*

Elle n'a jamais utilisé d'autre méthode car elle a toujours utilisé celle-ci aussi. Elle passe deux mois à faire travailler ses élèves sur la soustraction posée. Selon elle, le pré-requis à avoir pour comprendre la soustraction posée est de comprendre quel est le plus grand des deux nombres pour le mettre « en-haut ». C'est pourquoi, en amont à cet apprentissage, elle fait effectuer à ses élèves des exercices pour savoir classer les nombres du plus petit au plus grand. La principale difficulté qu'elle rencontre dans les copies de ses élèves est la confusion entre les dizaines et les unités, elle a aussi remarqué qu'ils oubliaient souvent d'additionner la retenue « +1 » en-bas de l'opération. Elle pense que tous les élèves devraient arriver à la même méthode en CE2, c'est pourquoi si un élève arrive d'une autre école et n'utilise pas la « technique traditionnelle » pour poser la soustraction elle lui explique cette méthode et veut qu'il l'utilise.

D'après les enquêtes que j'ai menées, les points de vue sur la soustraction posée divergent d'un enseignant à l'autre. Seulement une enseignante sur cinq utilise le cassage de la dizaine, les autres ne la connaissent pas ou bien la trouve trop surchargée en cas de trop grands nombres. Mais si on s'attarde de plus près à la notation avec la « technique traditionnelle », on s'aperçoit que tous les enseignants symbolisent différemment les retenues : certains utilisent des tailles différentes entre le « 1 » exprimant une dizaine et une unité, d'autres utilisent un « +1 » pour montrer qu'il faut ajouter une unité, ou bien un « 1(0) » pour faire apparaître qu'il s'agit d'un « 1 qui vaut une dizaine ». Mais il peut aussi représenter une dizaine de dizaines selon la colonne dans laquelle il est écrit. Les points de vue sont aussi mitigés en ce qui concerne l'arrivée d'un nouvel élève utilisant une technique opératoire différente dans la classe : certains enseignants imposeraient leur technique et d'autres laisseraient l'élève garder la sienne. D'après ces questionnaires les enseignants ne veulent pas insister sur le sens parce que la technique de la soustraction est déjà assez compliquée à comprendre pour les élèves. Ils ne veulent donc pas forcément que les élèves comprennent le sens sur lequel elle repose, mais qu'ils sachent la poser correctement et proprement en trouvant le bon résultat.

4. Classe de CE2

L'année suivante je n'ai pas pu observer des classes de la même école, j'ai donc été dans une autre école classée en ZEP (Zone d'Éducation Prioritaire) dans deux classes de CE2. C'était pour moi l'occasion de voir comment était enseignée la soustraction posée à ce niveau de classe et s'il y avait des différences dans la façon de l'enseigner comparées à une école ordinaire. Dans cette école les enseignants ont décidé d'apprendre simplement la méthode traditionnelle, car pour eux lorsque la division posée arrive avec le cassage de la dizaine dans les soustractions posées, les opérations deviennent trop surchargées. En effet, ça devient vite illisible avec des grands nombres et c'est compliqué lorsqu'il y a des zéros dans la soustraction (par exemple dans : 300 - 199). De plus, ils ne voulaient pas enseigner plusieurs techniques opératoires pour ne pas perturber les élèves.

Dans la première classe Solène en est à sa deuxième année d'enseignement, elle s'appuie sur les exercices du manuel *Cap Maths* et s'inspire du manuel *Picbille*. Dans sa séquence elle a prévu 7 séances dans lesquelles elle veut qu'il y ait beaucoup d'oralisation pour que les élèves mettent du sens à la soustraction. Elle a observé que dans cette école les élèves appliquaient la méthode sans y donner du sens forcément. C'est pourquoi, Solène essaie d'axer ses séances sur le sens de la technique opératoire pour les élèves qui peuvent le comprendre. Mais pour elle, mettre du sens ce n'est pas forcément utile, car même nous adultes n'en mettons pas forcément. En milieu de ZEP, l'enseignante s'est rendue compte que les termes de vocabulaire ou de syntaxe peuvent ne pas être compris par les élèves. La soustraction, selon elle, c'est ce que les élèves retiennent le moins parce qu'il y a beaucoup de termes (retrait, écart, différence, ...) qu'ils n'arrivent pas à assimiler à cette opération (au collège aussi). L'enseignante veut aussi que les élèves comprennent qu'une dizaine est aussi égale à 10 unités parce que les élèves ont des difficultés avec ces types d'égalité. C'est pourquoi elle a fait une séance à partir d'une collection de timbres, ainsi que de la manipulation d'étiquettes dans des boites avec des centaines et des unités : quand il n'y avait plus le matériel représentant les unités dans la boite, les élèves devaient se demander ce qu'il fallait faire et par quoi on pouvait les remplacer. Au niveau de la notation des retenues, l'enseignante note le « 1 » de la dizaine en bleu devant le chiffre du haut et le « 1+ » en rouge devant le chiffre du bas. Elle n'a pas pensé à leur proposer un moyen de vérification pour le résultat obtenu car elle n'avait pas assez de temps. Elle demande simplement de vérifier l'ordre de grandeur du résultat. Elle a remarqué que dans cette école les élèves avaient du mal à bien positionner les chiffres (à mettre un chiffre par carreau), ou encore qu'ils oubliaient de mettre l'autre retenue en bas pour équilibrer. Il y en a certains qui se permettent d'inverser ce qu'il faut calculer (« 5-2 » au lieu de « 2-5 »). Et il y a aussi des élèves qui additionnent alors qu'on est dans la soustraction. Sa principale difficulté dans l'apprentissage de la soustraction posée est d'employer les bons termes pour que les élèves puissent comprendre les retenues : certains élèves ne comprennent pas comment ça marche et n'y arrivent pas non plus de façon mécanique car ils manquent de concentration.

Sara est enseignante dans l'autre classe de CE2 de cette école, c'est sa première année en tant que titulaire d'une classe, auparavant elle était ZIL (Zone d'Intervention Localisée), elle utilise le manuel *A portée de maths*. L'enseignante veut passer toute la période sur les soustractions en donnant des devoirs dessus 2-3 fois par semaine et en y consacrant une séance par semaine. Elle n'a pas défini de nombre précis de séances dans sa séquence. En première période ils avaient travaillé sur les additions. Elle exigeait une propreté de l'opération posée pour une meilleure compréhension de l'opération. L'enseignante note les retenues de la soustraction posée avec un « +10 » (pour ne pas que les élèves fassent « +1 ») devant le chiffre du nombre du haut. Et « +1 » devant le chiffre du nombre du bas en petite écriture. Elle n'a pas pensé non plus à fournir aux élèves un moyen de vérification pour le résultat obtenu et n'utilise pas de matériel pour aborder la soustraction posée. Quand les élèves ont du mal à se représenter les nombres dans leur tête, elle leur conseille de se se servir de leurs doigts pour les matérialiser. La principale difficulté des élèves qu'elle a rencontrée est que dès le moment où la soustraction était impossible, les élèves allaient chercher à inverser les nombres (« 456-789 » ils feront « 789 - 456 ») ou les chiffres (« 784-656 » ils feront « 786-654 »). Par ailleurs elle a aussi observé que les élèves pensaient souvent à noter la première retenue en haut, mais pas la deuxième en bas. Ce qu'on retrouve dans la classe de Solène. La difficulté que Sara rencontre en tant qu'enseignante est un malaise à cause du maintien des écarts qu'elle a du mal à expliquer aux élèves. Elle n'a pas fait avec eux tout le côté du sens de la soustraction parce qu'elle considère que ça a déjà été fait l'année dernière. Elle veut surtout que les élèves comprennent la méthode et qu'ils comprennent qu' « on retire un nombre à un autre ».

Dans les observations de séances j'ai pu observer que les élèves avaient beaucoup de mal à soustraire les bons nombres et bien utiliser les retenues. Il aurait peut-être été plus appréciable pour eux de travailler davantage en CE2 sur le sens de la technique opératoire avec la conservation des écarts, point qu'a mis en avant Solène mais que Sara a considéré comme acquis en classe de CE1. Pourtant c'était loin d'être le cas. Les deux enseignantes m'ont dit s'être mises d'accord sur la notation des retenues pour la soustraction posée, or elles utilisent toutes les deux des notations différentes. Celle de Sara induit certains élèves en erreur car le « +1 » est noté devant le chiffre du nombre du bas donc certains élèves considèrent que ce « +1 » est valable pour le chiffre à gauche de celui en question. Il aurait été plus judicieux de le noter « 1+ » pour éviter cette confusion. Ce qui est difficile pour les enseignantes dans l'enseignement de cette technique opératoire c'est de faire comprendre la conservation des écarts pour que les élèves puissent mettre du sens à cette technique.

5. Problèmes posés à des classes de CE2

Les opérations permettent de résoudre des problèmes. En effet, lorsque les élèves ont acquis le sens des opérations et qu'ils savent utiliser plusieurs techniques opératoires il faut les faire travailler sur plusieurs types d'énoncés et les laisser choisir le calcul approprié. C'est le point sur lequel j'ai travaillé dans cette partie. Après avoir dressé une liste de problèmes de plusieurs types *(voir première colonne du tableau qui suit)* j'ai distribué ces énoncés à deux classes de CE2 avec la consigne : « Résous au moins 6 problèmes de ton choix. Pour chaque problème, écris l'opération que tu as faite pour trouver la réponse dans le cadre blanc (soit en ligne, soit posée) ou le schéma qui t'a permis de trouver la réponse, puis complète la phrase avec ta réponse à la question du problème. », puis je les ai corrigés et analysés un par un, et pour terminer j'ai fait une synthèse des réussites et des erreurs détaillées dans un tableau.

Énoncés	Non réussi (NR)	Réussi (R)	Statistiques	
			1ère ligne : problème résolu sans erreur. 2ème ligne : problème résolu avec la bonne opération avec et sans erreur.	
			NR	**R**
1/ Élise a 93 cartes Pokémon. Elle en a 23 de plus que Paul. Combien Paul a-t-il de cartes Pokémon ? Réponse : 93 - 23 = 70 **Soustraction > Comparaison d'états : recherche d'un des états**	1) **Addition** : a) Addition posée : 93 + 23 = 116 (6 élèves) 93 + 23 = 186 (1 élève) b) Soustraction posée résolue comme une addition : 93 - 23 = 16 (1 élève) c) Sur-comptage avec une addition en ligne et des schémas : 93 + IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII = 116 (1 élève) Analyse : Addition induite peut-être par le terme « de plus » 2) **Multiplication** : 93 x 23 (1 élève)	1) Soustraction posée (24 élèves)	10	24
2/ Lili a acheté un disque de 25€ et un hélicoptère télécommandé de 88€ pour son frère. Il lui reste 12 € dans son porte-monnaie. Combien d'argent avait-elle avant ces achats ? Réponse : 25 + 88 + 12 = 125 **Addition > Transformation : recherche de l'état initial**	1) **Oubli d'un calcul** : Addition posée : 25 + 88 = 113 (5 élèves) 25 + 88 = 13 (1 élève) 25 + 88 = 40 (1 élève) 2) **Erreurs de calcul** : a) Additions successives posées avec une mauvaise retenue (notée 5 au lieu de 1) : 25 + 88 + 12 = 162 (1 élève) b) Deux additions posées : 12 + 25 = 40 et 40 + 88 = 128 (1 élève) c) Addition en ligne : 12 + 25 + 88 = 124 (1 élève) 3) **Soustraction** : a) Soustractions successives : 25 - 88 - 12 = 98 (1 élève) b) Soustraction posée avec les mauvais termes : 25 - 88 = 60 (1 élève)	1) Additions successives posées (13 élèves dont 12 élèves sans erreur de calcul) 2) Deux additions posées : 25 + 88 = 113 et 113 + 12 = 125 (2 élèves dont 1 élève sans erreur de calcul) 3) Calcul mental (1 élève) 4) Addition en ligne (1 élève avec erreur de calcul)	12 9	14 17
3/ Une pelote contient 30 mètres de laine. Quelle longueur de laine contiennent 7 pelotes ? Réponse : 30 x 7 = 210 **Multiplication**	1) **Erreurs de calcul** : a) Additions successives posées : 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 = 140 (1 élève) 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 = 200 (1 élève) 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 = 180 (1 élève) Analyse : Beaucoup de termes donc difficulté à calculer le résultat. b) Multiplication posée : 30 x 7 = 217 (1 élève) 7 x 3 = 21 (1 élève) Analyse : Difficulté pour traiter le zéro. 2) **Addition posée** : 30 + 7 = 37 (3 élèves) 30 + 7 = 47 (1 élève) 300 + 000 = 300 (1 élève)	1) Multiplication posée 30 x 7 (6 élèves) 2) Multiplication en ligne (1 élève) 3) Additions successives 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 (1 élève) 4) Recherche par tâtonnement : plusieurs additions posées : 30 + 30 = 60, 30 + 30 = 60, 30 + 30 = 60, 30 + 60 = 90, 60 + 60 = 120, 90 + 120 = 210 (1 élève)	13 8	9 14

	3) **Soustraction posée** : 30 - *(10 gommé)* 7 = 137 (1 élève) 30 - 7 = 300 (1 élève) 30 - 7 = 40 (1 élève)			
4/ Pour aller en vacances Fabien a parcouru 193 Km en voiture ce matin et 225 Km cet après-midi. Quelle distance a-t-il parcourue aujourd'hui ? <u>Réponse</u> : 193 + 225 = 418 Addition > Composition de transformations : recherche de la transformation composée	1) **Erreurs de calcul** : a) Addition posée : 193 + 225 = 386 (1 élève) 193 + 225 = 425 (1 élève) b) Calcul mental (pas de calcul noté) : 318 (1 élève) <u>Analyse</u> : Difficulté à poser et calculer des retenues dans sa tête quand il y a beaucoup de chiffres. 2) **Soustraction posée** : 193 - 225 = 170 (1 élève)	1) Addition posée (20 élèves dont 18 sans erreur de calcul) 2) Calcul mental (1 élève avec erreur de calcul)	4 1	18 21
5/ Dans une salle de spectacle il y a 1564 filles et 1788 garçons. Combien y a-t-il de personnes dans cette salle de spectacle ? <u>Réponse</u> : 1564 + 1788 = 3352 **Addition > Partie/tout (composition de deux états) : recherche du tout**	1) **Erreurs de calcul** : Addition posée a) mauvais alignement des chiffres : 1564 + 1788 = 3452 (1 élève) b) oubli de calcul de retenue et de colonne : 1564 + 1788 = 342 (1 élève) c) retenues notées mais non prises en compte 1564 + 1788 = 2252 (1 élève) d) autres erreurs : 1564 + 1788 = 1892 (1 élève) 1564 + 1788 = 2221 (1 élève) 2) **Soustraction posée** : 1564-1788=1000 (1 élève) 3) **Multiplication** : 1788 x 1564 (1 élève)	1) Addition posée (24 élèves dont 19 sans erreur de calcul)	7 2	19 24
6/ Hier il faisait 34 degrés. Aujourd'hui, il fait 26 degrés. Quelle est la différence de température entre hier et aujourd'hui ? <u>Réponse</u> : 34 - 26 = 8 Soustraction > Transformation : recherche de la transformation	1) **Addition** : a) Posée : 34 + 26 = 60 (6 élèves) b) En ligne : 26 + 10 = 10 (1 élève) <u>Analyse</u> : Méconnaissance du vocabulaire « degré ». 2) **Erreurs de calcul** : a) Soustraction posée : 34 - 26 = 10 (1 élève) 34 - 26 = 11 (2 élèves) b) Calcul mental (pas de calcul noté) : 12 (1 élève)	1) Soustraction posée (11 élèves dont 8 sans erreur de calcul) 2) Calcul mental (2 élèves dont 1 avec une erreur de calcul)	11 8	9 12
7/ Une boîte de gâteaux coûte 3 € et une boîte de 14 chocolats coûte 5 €. Quel est le prix de 12 boîtes de gâteaux ? <u>Réponse</u> : 12 x 3 = 36 **Multiplication**	1) **Addition** : a) Additions successives posées : 13 + 14 + 5 = 23 (1 élève) 14 + 5 + 3 = 33 (1 élève) 3 + 14 + 12 = 29 (1 élève) 12 + 5 + 3 = 20 (1 élève) b) Addition posée : 3 + 14 = 17 (1 élève) 3 + 14 = 44 (1 élève) c) Addition posée avec les bons termes : 12 + 3 = 15 (1 élève) d) Addition en ligne : 3 + 5 = 8 (1 élève)	1) Multiplication posée (8 élèves dont 7 sans erreur de calcul) 2) Multiplication en ligne (1 élève) 3) Additions en ligne (1 élève avec erreur de calcul)	13 11	8 10

	2) Erreurs de calcul : a) Multiplication posée : 3 x 12 = 30 (1 élève) b) Additions en ligne : 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 33 (1 élève) Analyse : Beaucoup de termes donc difficulté à calculer le résultat. **3) Multiplication** : a) Multiplication posée : 14 x 5 = 70 (1 élève) b) Multiplication en ligne pour calculer ce qui est égal à 12 : 3 x 4 (1 élève) **4) Soustractions** successives posées : 14 - 12 - 3 (1 élève)			
8/ Un zèbre pèse environ 270kg soit 800 kg de moins qu'une girafe. Quel est le poids de la girafe ? <u>Réponse</u> : 270 + 800 = 1070 Addition > Comparaison d'états : recherche d'un des états.	**1) Soustraction :** a) Posée avec le mauvais ordre de grandeur : 270 - 800 = 540 (1 élève) 270-800=470 (3 élèves) 270-800=70 (1 élève) 270-800=670 (1 élève) b) Posée : 800 - 270 = 530 (1 élève) 800 - 270 = 670 (3 élèves) Analyse : Soustraction peut-être induite par le terme « de moins ».	1) Addition posée (8 élèves)	10	8
9/ Léa a uniquement des billes rouges et des billes bleues. Elle compte toutes ses billes et trouve 146 billes. Puis elle compte les billes bleues et trouve 73 billes bleues. Combien comptera-t-elle de billes rouges ? <u>Réponse</u> : 146 - 73 = 73 **Soustraction > Partie/tout (composition de deux états) : recherche d'un des deux états (du complément)**	**1) Addition posée** : 146 + 73 = 249 (4 élèves) 146 + 73 = 209 (1 élève) 146 + 73 = 219 (1 élève) **2) Erreur de calcul** : Soustraction posée : 146 - 73 = 103 (1 élève)	1) Soustraction posée (7 élèves dont 6 sans erreur de calcul)	7 6	6 7
10/ Pierre a 84 € ; Julien a 176 €. Combien d'argent Julien a de plus que Pierre ? <u>Réponse</u> : 176 - 84 = 92 **Soustraction > Comparaison d'états : recherche de la comparaison**	**1) Soustraction** posée avec le mauvais ordre de grandeur : 84 - 176 = 734 (1 élève) 84 - 176 = 128 (1 élève) 84 - 176 = 108 (1 élève) **2) Addition posée** : 84 + 176 = 260 (4 élèves) 176 + 84 = 260 (3 élèves) 176 + 84 = 210 (1 élève)	1) Soustraction posée (4 élèves)	11	4
11/ Dans son magasin, un marchand a 88 consoles, 71 manettes et 436 jeux vidéo. Pendant la journée il vend 38 consoles, 25 manettes et 152 jeux vidéos. Combien lui reste-t-il de jeux vidéo à la fin de la journée ?	**1) Additions** successives posées : 71 + 436 + 38 + 25 + 152 = 5222 (1 élève) 88 + 71 + 436 + 338 + 25 + 152 = 810 (1 élève) 436 + 152 + 71 + 38 + 25 = 786 (1 élève) 88 + 71 + 436 + 38 + 25 + 2 = 259 (1 élève)	1) Soustraction posée (5 élèves dont 1 avec erreur de calcul) 2) Soustractions posées séparément (1 élève avec erreur de calcul)	8 6	4 6

Réponse : 436 - 152 = 284 **Soustraction > Transformation : recherche de l'état final**	2) **Soustraction :** a) Soustractions successives posées : 88 - 71 - 15 - 1152 = 738 (1 élève) 88 - 71 - 436 (1 élève) b) Soustractions posées séparément : 436 - 152 = 284, 88 - 38 = 50, 71 - 25 = 46, 50 - 46 - 284 = 1872 avec le résultat 1872 (1 élève) 3) **Erreur de calcul** : a) Soustraction posée : 146 - 73 = 103 (1 élève) b) Soustractions posées séparément : 88 - 38 = 50, 71 - 25 = 54, 438 - 152 = 324 avec le résultat 324 (1 élève)			
12/ Il y a 1240 passagers sur un bateau. Lors d'une escale 45 passagers descendent du bateau, puis 155 et enfin 237. Combien de passagers reste-t-il dans le bateau ? Réponse : 1240 - 45 - 155 - 237 = 1240 - (45 + 155 + 237) = 763 **Soustraction > Composition de transformations : recherche de la transformation composée**	1) **Additions** successives posées : 1240 + 45 + 155 + 237 = 1677 (4 élèves) 2) **Erreur de calcul** : Soustractions successives posées : 1240 - 237 - 155 - 45 = 1000 (1 élève) 1240 - 237 - 155 - 45 (sans résultat) (2 élèves) 3) **Soustraction** posée : 1240 - 392 = 852 (1 élève) 1240 - 45 = 1195 (1 élève)	1) Soustractions posées séparément : 1240 - 45 = 1195, 1195 - 155 = 1040, 1040 - 237 = 803 (1 élève) 2) Soustractions successives posées (3 élèves avec erreurs de calcul)	9 6	1 4

Dans ces problèmes, les termes ayant posé souci aux élèves sont : « pelote », « degré », « soit ». Après avoir réalisé ce tableau d'analyses, j'ai listé les erreurs fréquentes des élèves :

- erreurs de calcul liées aux chiffres mal alignés,
- mauvais alignement des chiffres dans les opérations posées,
- quand on ne peut pas soustraire certains élèves calculent le complément entre deux nombres (7 pour aller à 8) ou le complément à 10 (pour « 2-7 » l'élève cherche 2 pour aller à 10) ou notent 0 pour montrer que c'est impossible,
- oubli de calcul de retenues,
- aucune retenue notée dans la soustraction posée,
- retenues notées n'importe où, au hasard,
- pas de vérification de l'ordre de grandeur du résultat obtenu,
- non prise en compte de l'ordre de grandeur des nombres ce qui entraine une soustraction d'un nombre plus grand au plus petit (270-800),
- quand il y a des opérations posées successives certains élèves mettent un seul signe sur le côté (34 15 - 89 145),
- vocabulaire de certains problèmes qui induit en erreur sur l'opération à utiliser : « de plus », « de moins ».

Les problèmes qui ont posé le plus de difficultés aux élèves pour trouver de quelle opération ils relevaient sont : le n°7, le n°12 et le n°10.

Dans le n°7 ce qui a dû les induire en erreur c'est la diversité des termes : ils ne savaient pas lesquels choisir et du fait qu'on leur demandait un prix ils ont dû vouloir calculer celui de plusieurs aliments, d'où l'addition (utilisée par 8 élèves) qui fait écho au problème n°2.

Dans le n° 12, 4 élèves ont utilisé l'addition, qui est peut-être liée à la méconnaissance des termes du problème (« escale ») ou bien parce qu'il y avait plusieurs nombres et qu'ils pensent qu'on ne peut pas soustraire plusieurs nombres. 2 élèves ont commencé à poser une soustraction à deux termes et se sont arrêtés car ils ne savaient pas comment continuer à soustraire les autres nombres.

Dans le n°10 certains élèves n'ont pas prêté attention à l'ordre de grandeur des nombres et ont retiré un nombre plus grand au premier nombre. 8 élèves ont utilisé l'addition pour résoudre ce problème, cette opération peut-être due au terme « de plus » qui les a induit en erreur.

Les problèmes les mieux réussis sans erreur de calcul sont : le n°4, le n°5, le n°1, le n°2 et le n°6. Le fait qu'il y ait 3 retenues et 2 nombres à 4 chiffres dans une même opération ne pose donc pas tant de souci à la plupart des élèves (n°5). Là où les élèves ont le plus de mal à résoudre le problème, c'est dans ceux où il faut sélectionner des nombres parmi plusieurs termes (n°11 et n°7) et quand il y a plusieurs soustractions à effectuer simultanément (n°12).

CONCLUSION

Les techniques opératoires pour la soustraction posée sont donc nombreuses et il existe plusieurs façons de les aborder. Même si les enseignants choisissent la même méthode, ils n'ont pas forcément la même façon de noter les retenues, de l'expliquer, de l'enseigner. C'est surtout le cas pour la méthode traditionnelle. D'autant plus que tous les enseignants n'utilisent pas le même type de matériel. Par ailleurs, les élèves n'ont pas vraiment de libertés face à cet apprentissage qui relève de plusieurs conventions d'écritures. C'est donc un apprentissage difficile et ce n'est pas très clair aussi bien pour les enseignants que pour les élèves. Aujourd'hui le principal but dans les programmes n'est plus que les élèves sachent faire des opérations, mais qu'ils en comprennent le sens. Cependant, les enseignants du premier degré s'attardent davantage à faire comprendre la technique d'une opération, plutôt que son sens. Pour ne pas troubler les élèves il serait plus judicieux de leur apprendre une seule technique opératoire et de beaucoup travailler sur du calcul réfléchi en parallèle pour les aider à mieux aborder la soustraction posée. La finalité de ses calculs posés est de pouvoir résoudre correctement des problèmes et de savoir quelle opération utiliser, d'où la nécessité de mettre du sens aux techniques opératoires.

BIBLIOGRAPHIE

Bessot A. (2004) *Une introduction à la théorie des situations didactiques.*
Briand J., Chevalier M-C. (1995) *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques.*
Brissiaud R. (2013) *Apprendre à calculer à l'école : Les pièges à éviter en contexte francophone.*
Goëtz-Georges M. (2007) *Situations jeux pour des apprentissages mathématiques en maternelle.*
Henry M. (2003) Les publications de l'IREM de Besançon, *Didactique des mathématiques, une présentation de la didactique en vue de la formation des enseignants.*
Houssaye J. (1993) *Le triangle pédagogique ou comment comprendre la situation pédagogique.*
Lemoine A., Sartiaux P. (2005) *Des mathématiques aux enfants, savoirs en jeux.*
Mayo C. (1999) *Devenir bon en maths.*
Pauvert M. (1990) *Faire comprendre la soustraction.*
Piaget J., Inhelder B. (2004) *La psychologie de l'enfant.*
Rondard M. (2008) *Boîte à outils pour l'apprentissage de la numération.* - Guide pédagogique chez Retz.
Soury-Lavergne S. (2010) *Introduction à la théorie des situations didactiques.*

MANUELS SCOLAIRES

Hachette Education (2008) *Les mathématiques à la découverte du monde, nouvelle édition.*
Hatier (2012) *Euro maths.*
Retz (2009) *J'apprends les maths.*
Sed (2012) *Classe Maths.*

SITOGRAPHIE

Batteux O. (2004) *10 points à connaître et erreurs à éviter en didactique des maths*, http://www.astro52.com/didactique-maths.html, 06/05/13

Brissiaud R. (2006) *Calcul et résolution de problèmes : le débat avance,* http://www.cafepedagogique.net/lesdossiers/Pages/contribs_brissiaud3.aspx, 04/01/13

Brissiaud R. (2008) *Les mathématiques à l'école : programmes, liberté pédagogique et réussite scolaire,* http://www.cafepedagogique.net/lesdossiers/Pages/2008/programmes_Brissiaud.aspx, 04/01/13

Cédelle L. (2008) *Une nouvelle enquête atteste de la baisse du niveau des élèves en fin de CM2,* http://www.lemonde.fr/politique/article/2008/03/28/une-nouvelle-enquete-atteste-de-la-baisse-du-niveau-des-eleves-en-fin-de-cm2_1028630_823448.html, 01/05/14

Direction de l'enseignement scolaire (2008) *Les nouveaux programmes de l'école primaire*, http://www.inattendu.org/grape/IMG/pdf/calcul_pose-2.pdf, 04/01/13

Eduscol (2008) *Le calcul posé à l'école élémentaire,* http://www.ec-pershing-versailles.ac-versailles.fr/peda/docs_appl&acc/math/calcul_pose.pdf, 29/04/13

Eduscol (2010) *Le nombre au cycle 3, apprentissages numériques*, http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/44/9/NombreCycle3_web_VD_227449.pdf, 03/04/13

Faux C. (2009) *Construction du nombre, du comptage au calcul*, http://netia59a.ac-lille.fr/slilleouest/IMG/pdf/PPT3_tech_op_ratoires_stage_cycle_2_nov_2009_lille1_ouest.pdf , 30/12/13

Huby C. (2012) *L'enseignement du comptage en débat,* http://www.cahiers-pedagogiques.com/spip.php?article7946, 04/01/13

Huby C. (2012) *Nul en maths,* http://ecolereferences.blogspot.fr/2012/06/nuls-en-maths.htm, 06/03/13

Instructions officielles (2008) *Cycle des apprentissages fondamentaux et Cycle des approfondissements,* http://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/default.htm, 04/01/13

IEN de Landivisiau (2010) *Les techniques opératoires en cycles 2 et 3*, http://classeelementaire.free.fr/maths/operations/techniqueoperatoire.htm, 17/04/13

Mégard M. (2009) *Les enjeux majeurs de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire*, http://pedagogie.ac-toulouse.fr/ien82-moissac/IMG/pdf/Les_enjeux_des_programmes_2008_-_Mathematiques.pdf, 25/03/13

Pernoux D. (2008) *Quelques points de repères concernant les opérations*, http://pernoux.pagesperso-orange.fr/operations.pdf , 03/04/13

Poisard C. (2004) *Le boulier chinois*, http://www.animath.fr/old/UE/UE04/poisard.pdf, 30/04/13

Poisard C. (2006) *L'étude du boulier chinois*, http://www.math.ens.fr/culturemath/materiaux/poissard/fiche3.pdf , 30/04/13

Roditi E. (2008) *Repères sur l'apprentissage du nombre chez l'enfant,* http://eroditi.free.fr/Enseignement/DDML3S1_08-09/DDML3_S1_C2B_Nombre.pdf, 03/04/13

Thomas Y. (2012) *Trois techniques de soustraction*, http://primaths.fr/outils%20cycle%202/troistechniquesd.html, 03/04/13

Vitry D. (2008) *Note d'information*, http://media.education.gouv.fr/file/2008/23/9/NI0838_41239.pdf, 01/05/14